



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง เลขยกกำลัง

เรื่อง เลขยกกำลัง

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.2

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง เลขยกกำลัง มุ่งพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับการแทนจำนวนด้วยกำลัง ความสัมพันธ์ระหว่างฐานกับเลขชี้กำลัง และการใช้สมบัติของกำลังอย่างมีเหตุผล โดยให้ความสำคัญกับความหมายของสัญลักษณ์ เงื่อนไขของนิพจน์ และความถูกต้องของการดำเนินการ

เนื้อหาเริ่มจากความหมายและเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม สมบัติของกำลัง การจัดรูปและการเปลี่ยนฐาน แล้วเชื่อมโยงสู่ราก เลขชี้กำลังเศษส่วน การเปรียบเทียบ สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ ตลอดจนสมการและอสมการ จากนั้นขยายสู่เลขหลักหน่วย แบบรูปซ้ำ ผลบวกของตัวประกอบ และการประยุกต์ร่วมกับพีชคณิต

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง โดยเชื่อมโยงจำนวนเต็ม เศษส่วน สมการ และพหุนาม ผู้เรียนควรมีพื้นฐานการดำเนินการกับจำนวนเต็มและเศษส่วน

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม คำว่าจำนวนเต็มบวกหมายถึง $1, 2, 3, \dots$
- เลขชี้กำลังลบและเลขชี้กำลังศูนย์ใช้กับฐานที่ไม่เป็นศูนย์ ส่วนสูตรเลขชี้กำลังเศษส่วนในเล่มนี้กำหนดฐานเป็นบวก เว้นแต่กล่าวถึงนิยามรากโดยตรง
- $\sqrt{a}$ แทนรากที่สองที่ไม่เป็นลบของ $a \geq 0$ ส่วนคำว่าตัวประกอบในตอนผลบวกของตัวประกอบ หมายถึงตัวประกอบบวก
- คำตอบที่เป็นเศษส่วนเขียนในรูปอย่างต่ำ ปริมาณที่มีหน่วยต้องระบุหน่วย และสัญกรณ์วิทยาศาสตร์ของจำนวนบวกใช้รูป $A \times 10^n$ โดย $1 \leq A < 10$

เรื่อง เลขยกกำลัง

สารบัญ

ตอนที่ 1 ความหมายและเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

เนื้อหาและตัวอย่าง	4
แบบฝึกหัดข้อ 1–12	7

ตอนที่ 2 สมบัติของเลขยกกำลัง

เนื้อหาและตัวอย่าง	11
แบบฝึกหัดข้อ 13–19	14

ตอนที่ 3 การจัดรูปและการเปลี่ยนฐาน

เนื้อหาและตัวอย่าง	17
แบบฝึกหัดข้อ 20–26	20

ตอนที่ 4 รากและเลขชี้กำลังเศษส่วน

เนื้อหาและตัวอย่าง	23
แบบฝึกหัดข้อ 27–39	27

ตอนที่ 5 การเปรียบเทียบเลขยกกำลัง

เนื้อหาและตัวอย่าง	32
แบบฝึกหัดข้อ 40–49	35

ตอนที่ 6 สัญกรณ์วิทยาศาสตร์

เนื้อหาและตัวอย่าง	39
แบบฝึกหัดข้อ 50–59	42

เรื่อง เลขยกกำลัง

สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 สมการและอสมการเลขยกกำลัง

เนื้อหาและตัวอย่าง	46
แบบฝึกหัดข้อ 60–70	50

ตอนที่ 8 เลขหลักหน่วยและแบบรูปซ้ำ

เนื้อหาและตัวอย่าง	55
แบบฝึกหัดข้อ 71–80	59

ตอนที่ 9 ผลบวกของตัวประกอบ

เนื้อหาและตัวอย่าง	63
แบบฝึกหัดข้อ 81–90	66

ตอนที่ 10 การประยุกต์ร่วมกับพีชคณิต

เนื้อหาและตัวอย่าง	70
แบบฝึกหัดข้อ 91–94	73
เฉลยคำตอบ	75
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	79

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

ความหมายและเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

ฐานและเลขชี้กำลัง

เลขยกกำลังใช้แทนผลคูณของจำนวนเดียวกันหลายตัว เมื่อ a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวก นิยามว่า

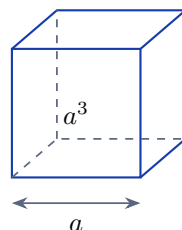
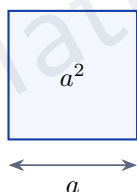
ความหมายของเลขยกกำลัง

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ ตัว}}$$

a เรียกว่า **ฐาน** และ n เรียกว่า **เลขชี้กำลัง**

เช่น $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ ฐานคือ 3 และเลขชี้กำลังคือ 4 เลขชี้กำลังบอกจำนวนตัวประกอบที่นำมาคูณกัน มิใช่จำนวนที่นำมาคูณกับฐานเพียงครั้งเดียว ดังนั้น 3^4 จึงไม่เท่ากับ 3×4

กำลังสองและกำลังสามสัมพันธ์กับพื้นที่และปริมาตร เมื่อด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาว a หน่วย พื้นที่เท่ากับ a^2 ตารางหน่วย และลูกบาศก์ที่มีด้านยาว a หน่วย มีปริมาตร a^3 ลูกบาศก์หน่วย โดย $a > 0$



ตัวอย่าง 1.1 เขียน $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$ ในรูปเลขยกกำลัง และหาค่า

วิธีคิด มีตัวประกอบ 4 ทั้งหมด 5 ตัว จึงเขียนเป็น 4^5 และคำนวณได้ $4^5 = 1,024$

ตอบ $4^5 = 1,024$

ตัวอย่าง 1.2 รูปแบบหนึ่งเริ่มด้วยจุด 2 จุด และเพิ่มจำนวนจุดเป็น 3 เท่าทุกชั้น หลังเพิ่ม 3 ชั้นมีจุดกี่จุด

วิธีคิด จำนวนจุดเป็น 2, 6, 18, 54 ตามลำดับ หรือคำนวณจาก $2 \times 3^3 = 54$

ตอบ 54 จุด

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ความหมายและเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

ฐานติดลบและขอบเขตของเครื่องหมาย

วงเล็บระบุว่าจำนวนใดเป็นฐาน เช่น $(-3)^4$ มีฐาน -3 ส่วน -3^4 หมายถึง $-(3^4)$ เพราะค่านวณเลขยกกำลังก่อนเครื่องหมายลบที่อยู่นอกฐาน

เครื่องหมายของกำลังของจำนวนลบ

เมื่อ $a > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$(-a)^n = \begin{cases} a^n & n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -a^n & n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

จำนวนลบสองจำนวนคูณกันได้จำนวนบวก จึงจับคู่ตัวประกอบลบได้ครบเมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนคู่ หากเป็นจำนวนคี่จะเหลือตัวประกอบลบหนึ่งตัว ผลคูณจึงเป็นลบ

นิพจน์	ความหมาย	ค่า
$(-3)^2$	$(-3)(-3)$	9
-3^2	$-(3 \times 3)$	-9
$(-3)^3$	$(-3)(-3)(-3)$	-27
$(-1)^{2k}$	k เป็นจำนวนเต็มบวก	1
$(-1)^{2k+1}$	k เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ	-1

ตัวอย่าง 1.3 หาค่าของ $(-2)^4 - 2^4$

วิธีคิด พจน์แรกมีฐานเป็นลบและเลขชี้กำลังเป็นจำนวนคู่ จึงได้

$$(-2)^4 - 2^4 = 16 - 16 = 0$$

ตอบ 0

ตัวอย่าง 1.4 หาค่าของ $(-1)^{35} + (-1)^{36} + (-2)^3$

วิธีคิด เลขชี้กำลัง 35 เป็นจำนวนคี่ ส่วน 36 เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น

$$(-1)^{35} + (-1)^{36} + (-2)^3 = -1 + 1 - 8 = -8$$

ตอบ -8

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

ความหมายและเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

เลขชี้กำลังศูนย์และเลขชี้กำลังลบ

พิจารณาค่าของกำลังของ 2 เมื่อลดเลขชี้กำลังทีละ 1 ค่าของจำนวนจะลดลงด้วยการหารด้วย 2 ทุกครั้ง

เลขชี้กำลัง	3	2	1	0	-1	-2
ค่าของกำลัง	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

จึงขยายความหมายของเลขยกกำลังให้ครอบคลุมเลขชี้กำลังศูนย์และเลขชี้กำลังลบ โดยยังรักษาสสมบัติของการคูณและการหารไว้

นิยามเพิ่มเติม

เมื่อ $a \neq 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

เมื่อ $a, b \neq 0$ จะได้ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

เลขชี้กำลังลบแสดงส่วนกลับ มิได้หมายความว่าค่าของเลขยกกำลังต้องเป็นลบ เช่น $2^{-3} = \frac{1}{8} > 0$ สำหรับฐานศูนย์ นิยาม $0^n = 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ส่วน 0^0 และ 0^{-n} ไม่กำหนดค่าในเนื้อหา

ตัวอย่าง 1.5 หาค่าของ $7^0 + 3^{-2}$
วิธีคิด ใช้ $7^0 = 1$ และ $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ จึงได้ $1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}$
ตอบ $\frac{10}{9}$
ตัวอย่าง 1.6 หาค่าของ $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$
วิธีคิด เปลี่ยนฐานเป็นส่วนกลับแล้วใช้เลขชี้กำลังบวก

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

ตอบ $\frac{25}{4}$

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-3

ความหมายและเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

ข้อ 1 จงระบุฐานและเลขชี้กำลังของ 6^4

ตอบ _____

ข้อ 2 จงเขียน $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)$ ในรูปเลขยกกำลัง และหาค่า

ตอบ _____

ข้อ 3 จงหาค่าของ $(-5)^2 - 5^2$

ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4

รากและเลขชี้กำลังเศษส่วน

รากที่สองและรากที่ n

รากที่ n ของจำนวน a หมายถึงจำนวนที่ยกกำลัง n แล้วได้ a โดย n เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 2 ขึ้นไป สำหรับรากอันดับคู่ของจำนวนบวก สัญลักษณ์ $\sqrt[n]{a}$ เลือกค่าที่ไม่เป็นลบ

ความหมายของสัญลักษณ์ราก

เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ กำหนด $a \geq 0$ และ

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a, b \geq 0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ ใช้ได้กับจำนวนจริง a ทุกจำนวน และมีรากจริงเพียงค่าเดียว

เช่น $\sqrt{36} = 6$ และ $\sqrt[3]{-8} = -2$ ต้องแยกค่าของสัญลักษณ์รากออกจากการแก้สมการ เพราะสมการ $x^2 = 36$ มีคำตอบสองค่า คือ $x = 6$ และ $x = -6$



ตัวอย่าง 4.1 หาค่าของ $\sqrt{49} + \sqrt[3]{-27}$

วิธีคิด สัญลักษณ์รากที่สองให้ค่าที่ไม่เป็นลบ จึงมี $\sqrt{49} = 7$ ส่วน $\sqrt[3]{-27} = -3$ ดังนั้นผลบวกเท่ากับ $7 - 3 = 4$

ตอบ 4

ตัวอย่าง 4.2 หาค่าของ $\sqrt{(-5)^2}$

วิธีคิด จำนวนภายในรากเท่ากับ 25 และ $\sqrt{25} = 5$ โดยทั่วไป $\sqrt{x^2} = |x|$ สำหรับจำนวนจริง x

ตอบ 5

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

รากและเลขชี้กำลังเศษส่วน

เลขชี้กำลังเศษส่วน

เพื่อให้การเขียนกำลังสัมพันธ์กับราก นิยามเลขชี้กำลังเศษส่วนสำหรับฐานบวกดังนี้

กำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

เมื่อ $a > 0$, m เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}}$$

ตัวส่วนของเลขชี้กำลังบอกอันดับของราก ส่วนตัวเศษบอกกำลัง เช่น $16^{3/4}$ หมายถึงนำรากที่สี่ของ 16 มายกกำลังสาม การหารากก่อนมักทำให้ค่าระหว่างคำนวณมีขนาดเล็กลง

ตัวอย่าง 4.3 หาค่าของ $32^{3/5}$

วิธีคิด เนื่องจาก $32 = 2^5$ จึงมี $\sqrt[5]{32} = 2$ และ

$$32^{3/5} = (\sqrt[5]{32})^3 = 2^3 = 8$$

ตอบ 8

ตัวอย่าง 4.4 หาค่าของ $81^{-1/2}$

วิธีคิด ใช้เลขชี้กำลังลบเพื่อเปลี่ยนเป็นส่วนกลับ

$$81^{-1/2} = \frac{1}{81^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9}$$

ตอบ $\frac{1}{9}$

เงื่อนไขของฐาน

ในสูตรเลขชี้กำลังเศษส่วนของเล่มนี้กำหนดฐานเป็นบวก เพื่อใช้สมบัติของกำลังได้อย่างสอดคล้อง ส่วนรากของจำนวนลบอันดับคี่พิจารณาจากนิยามรากโดยตรง ไม่ใช้สูตรกำลังเศษส่วนโดยละเอียด

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 4 (ต่อ)

รากและเลขชี้กำลังเศษส่วน

การจัดรูปกำลังและราก

เมื่อฐานเป็นบวก สมบัติการคูณ การหาร และกำลังของกำลังใช้กับเลขชี้กำลังตรรกยะได้ จึงเปลี่ยนรากเป็นเลขชี้กำลังเศษส่วนแล้วรวมกำลังของฐานเดียวกัน

สมบัติของรากเมื่อ $a, b > 0$

กำหนดให้ m, n เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 2 ขึ้นไป

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}, \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{1/(mn)}$$

สมบัติข้างต้นเป็นสมบัติของผลคูณและผลหาร ไม่ใช่ผลบวก เช่น $\sqrt{9+16} = 5$ แต่ $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$

ตัวอย่าง 4.5 หาค่าของ $\frac{\sqrt[3]{2^{12}}}{2^6}$

วิธีคิด เปลี่ยนรากเป็นกำลัง

$$\frac{(2^{12})^{1/3}}{2^6} = 2^{4-6} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

ตอบ $\frac{1}{4}$

ตัวอย่าง 4.6 ให้ $z = 64$, $y = \sqrt[3]{z}$ และ $x = \sqrt{y}$ จงหา $x + 2y$

วิธีคิด เริ่มจากความสัมพันธ์ที่ทราบค่า

$$y = \sqrt[3]{64} = 4, \quad x = \sqrt{4} = 2$$

จึงได้ $x + 2y = 2 + 2(4) = 10$

ตอบ 10

ตัวอย่าง 4.7 จัดรูป $\frac{x^{-2}y^{1/2}}{\sqrt{x^4y^{-1}}}$ เมื่อ $x, y > 0$

วิธีคิด เนื่องจาก $\sqrt{x^4} = x^2$ จึงได้ $x^{-2-2}y^{1/2-(-1)} = x^{-4}y^{3/2}$

ตอบ $\frac{y^{3/2}}{x^4}$

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 4 | ข้อ 27-29

รากและเลขชี้กำลังเศษส่วน

ข้อ 27 จงหาค่าของ $25^{1/2} + 3^0$

ตอบ _____

ข้อ 28 จงหาค่าของ $27^{4/3}$

ตอบ _____

ข้อ 29 จงหาค่าของ $16^{-3/4}$

ตอบ _____