



# MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม

[www.mathstandard.com](http://www.mathstandard.com)

## เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม

## คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.2

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม มุ่งพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับมุม ส่วนโค้ง คอร์ด เส้นสัมผัส และความสัมพันธ์ของความยาวในวงกลม ตลอดจนการให้เหตุผลทางเรขาคณิตโดยเชื่อมโยงข้อมูลของจุด เส้น และมุมอย่างเป็นลำดับ

เนื้อหา เริ่ม จาก ส่วนประกอบ ของ วงกลม และ ทฤษฎีบท มุม พื้นฐาน แล้วพัฒนา ไป สู่ คอร์ด เส้นสัมผัสร่วม วงกลมแนบใน แบนนอก และล้อมรอบ การหาพื้นที่และความยาวรอบรูปที่มีส่วนโค้ง รวมทั้งรูปหลายเหลี่ยมในวงกลมและทฤษฎีบทโตรีม

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การ ประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษา ปี ที่ 4 และ แนว ข้อสอบ แข่งขัน ที่ เกี่ยวข้อง โดยใช้ ความ รู้ เรื่อง มุม สามเหลี่ยม ความเท่ากันทุกประการ ความคล้าย ทฤษฎีบทพีทาโกรัส พื้นที่ อัตราส่วนตรีโกณมิติ และสมการตามความจำเป็น

## ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- ใช้อักษรพิมพ์ใหญ่แทนชื่อจุด และใช้  $AB$  แทนความยาวส่วนของเส้นตรง  $\overline{AB}$  เมื่อปรากฏในสมการ
- ในสามเหลี่ยม  $ABC$  เมื่อใช้ด้าน  $a, b, c$  ให้  $a = BC, b = CA, c = AB$  ซึ่งอยู่ตรงข้ามมุม  $A, B, C$  ตามลำดับ
- ใช้ Area แทนพื้นที่ และระบุชื่อรูปเมื่อเปรียบเทียบหลายรูป ตัวแปรอื่นให้ความหมายตามที่กำหนดในแต่ละหัวข้อหรือตัวอย่าง
- ขนาดส่วนโค้งวัดเป็นองศา ส่วนความยาวส่วนโค้งวัดเป็นหน่วยความยาว ในแต่ละหัวข้อจะกำหนดความหมายของสัญลักษณ์และส่วนโค้งที่พิจารณา
- ใช้หน่วยที่สอดคล้องกัน และตอบด้วยค่าที่แน่นอน เช่น  $\pi$  หรือกรณฑ์ เว้นแต่โจทย์ระบุให้ประมาณค่า
- ความยาวเป็นบวก รูปประกอบแสดงตำแหน่งและความสัมพันธ์ ไม่ใช้การวัดจากรูปแทนข้อมูลที่กำหนดและเหตุผลทางคณิตศาสตร์

เรียบเรียงโดย MathStandard สำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน

ข้อมูลเพิ่มเติม [www.mathstandard.com](http://www.mathstandard.com)

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม

## สารบัญ

### ตอนที่ 1 วงกลมและมุมพื้นฐาน

|                    |    |
|--------------------|----|
| เนื้อหาและตัวอย่าง | 4  |
| แบบฝึกหัดข้อ 1–10  | 11 |

### ตอนที่ 2 มุมจากคอร์ด เส้นตัด และเส้นสัมผัส

|                    |    |
|--------------------|----|
| เนื้อหาและตัวอย่าง | 17 |
| แบบฝึกหัดข้อ 11–20 | 22 |

### ตอนที่ 3 คอร์ดและความสัมพันธ์ของความยาว

|                    |    |
|--------------------|----|
| เนื้อหาและตัวอย่าง | 29 |
| แบบฝึกหัดข้อ 21–30 | 35 |

### ตอนที่ 4 เส้นสัมผัสและวงกลมที่สัมผัสกัน

|                    |    |
|--------------------|----|
| เนื้อหาและตัวอย่าง | 41 |
| แบบฝึกหัดข้อ 31–40 | 47 |

### ตอนที่ 5 วงกลมแนบใน แนบนอก และล้อมรอบ

|                    |    |
|--------------------|----|
| เนื้อหาและตัวอย่าง | 53 |
| แบบฝึกหัดข้อ 41–50 | 61 |

### ตอนที่ 6 พื้นที่และความยาวรอบรูปที่มีส่วนโค้ง

|                    |    |
|--------------------|----|
| เนื้อหาและตัวอย่าง | 68 |
| แบบฝึกหัดข้อ 51–60 | 75 |

เรื่อง ทฤษฎีบทวงกลม

## สารบัญ (ต่อ)

ตอนที่ 7 รูปหลายเหลี่ยมในวงกลมและการประยุกต์

เนื้อหาและตัวอย่าง 82

แบบฝึกหัดข้อ 61–70 88

เฉลยคำตอบ 94

เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ 98

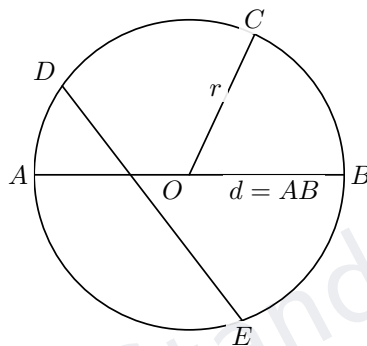
เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

## วงกลมและมุมพื้นฐาน

### 1.1 วงกลมและส่วนประกอบ

วงกลมเป็นเซตของจุดบนระนาบที่อยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะเท่ากัน จุดคงที่นั้นเรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** และระยะดังกล่าวเรียกว่า **รัศมี**

คอร์ดเป็นส่วนของเส้นตรงที่ปลายทั้งสองอยู่บนวงกลม คอร์ดที่ผ่านศูนย์กลางเรียกว่าเส้นผ่านศูนย์กลาง ปลายคอร์ดแบ่งเส้นรอบวงเป็นสองส่วนโค้ง หากคอร์ดไม่ใช่เส้นผ่านศูนย์กลาง จะเรียกส่วนที่สั้นกว่าว่าส่วนโค้งเล็ก และส่วนที่ยาวกว่าว่าส่วนโค้งใหญ่



#### ปริมาณพื้นฐาน

ให้  $r$  เป็นรัศมี  $d$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง  $C$  เป็นความยาวเส้นรอบวง และ Area เป็นพื้นที่ภายในวงกลม

$$d = 2r, \quad C = 2\pi r, \quad \text{Area} = \pi r^2$$

**ตัวอย่าง 1** แผ่นวงกลมมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 10 เซนติเมตร จงหาเส้นรอบวงและพื้นที่

**วิธีคิด** รัศมีเท่ากับ  $10/2 = 5$  เซนติเมตร จึงมีเส้นรอบวง  $2\pi(5) = 10\pi$  เซนติเมตร และพื้นที่  $\pi 5^2 = 25\pi$  ตารางเซนติเมตร

**ตอบ** เส้นรอบวง  $10\pi$  เซนติเมตร และพื้นที่  $25\pi$  ตารางเซนติเมตร

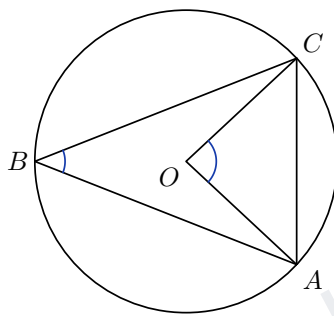
เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

## วงกลมและมุมพื้นฐาน

### 1.2 มุมที่ศูนย์กลางและมุมบนเส้นรอบวง

มุมที่ศูนย์กลางมีจุดยอดอยู่ที่ศูนย์กลางของวงกลม ส่วนมุมบนเส้นรอบวงมีจุดยอดอยู่บนวงกลมและแขนทั้งสองผ่านปลายส่วนโค้ง ความสัมพันธ์ระหว่างมุมทั้งสองพิจารณาจากส่วนโค้งเดียวกัน

ในรูป  $A, C$  เป็นปลายส่วนโค้ง และ  $B$  อยู่บนส่วนโค้งใหญ่อีกด้านหนึ่ง มุม  $ABC$  จึงรองรับส่วนโค้ง  $AC$  ที่ไม่ผ่าน  $B$



#### ทฤษฎีบทมุมที่รองรับส่วนโค้งเดียวกัน

ให้  $O$  เป็นศูนย์กลาง และ  $A, B, C$  เป็นจุดต่างกันบนวงกลม เมื่อมุม  $AOC$  กับมุม  $ABC$  รองรับส่วนโค้ง  $AC$  เดียวกัน

$$\angle AOC = 2\angle ABC$$

ในกรณีนี้เลือกมุมที่ศูนย์กลางให้ตรงกับส่วนโค้งที่พิจารณา

**ตัวอย่าง 2** มุมบนเส้นรอบวงรองรับส่วนโค้งขนาด  $86^\circ$  จงหาขนาดมุนั้น

**วิธีคิด** ขนาดส่วนโค้งเท่ากับขนาดมุมที่ศูนย์กลางซึ่งรองรับส่วนโค้งนั้น ดังนั้นมุมบนเส้นรอบวงมีขนาด  $86^\circ/2 = 43^\circ$

**ตอบ**  $43^\circ$

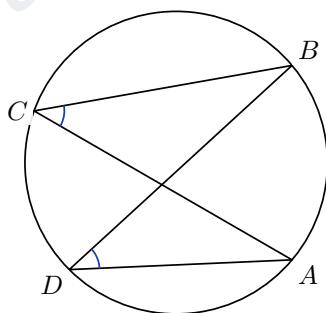
เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

## วงกลมและมุมพื้นฐาน

### 1.3 มุมที่เท่ากันและมุมกลับ

มุมบนเส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน แม้มีจุดยอดต่างกัน

เมื่อจุดยอดของมุมอยู่บนส่วนโค้งเล็ก มุมนั้นรองรับส่วนโค้งใหญ่ ดังนั้นมุมที่ศูนย์กลางซึ่งสัมพันธ์กันเป็นมุมกลับที่มีขนาดมากกว่า  $180^\circ$



#### แยกส่วนโค้งที่รองรับมุม

เมื่อ  $C, D$  อยู่บนส่วนโค้งด้านเดียวกันของคอร์ด  $AB$  และเป็นจุดต่างจาก  $A, B$

$$\angle ACB = \angle ADB$$

ถ้ามุมบนเส้นรอบวงมีขนาด  $\alpha$  องศา ส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นมีขนาด  $2\alpha$  องศา

**ตัวอย่าง 3** มุมบนเส้นรอบวงเท่ากับ  $126^\circ$  จงหามุมที่ศูนย์กลางทั้งมุมกลับที่สอดคล้องกันและมุมเล็ก

**วิธี คิด** มุมกลับ เท่ากับ  $2(126^\circ) = 252^\circ$  มุม ทั้งสอง รอบ ศูนย์กลาง รวม  $360^\circ$  จึง ได้ มุม เล็ก  $360^\circ - 252^\circ = 108^\circ$

**ตอบ** มุมกลับ  $252^\circ$  และมุมเล็ก  $108^\circ$

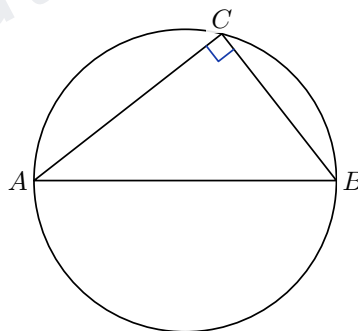
เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

## วงกลมและมุมพื้นฐาน

### 1.4 มุมในครึ่งวงกลม

เส้นผ่านศูนย์กลางแบ่งวงกลมเป็นส่วนโค้งสองส่วนที่มีขนาดส่วนละ  $180^\circ$  มุมบนเส้นรอบวงที่รองรับเส้นผ่านศูนย์กลางจึงมีขนาดครึ่งหนึ่งของ  $180^\circ$  และเป็นมุมฉาก

สมบัตินี้ทำให้ใช้ผลบวกมุมสามเหลี่ยม ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และอัตราส่วนตรีโกณมิติร่วมกับรูปวงกลมได้



#### เงื่อนไขของมุมฉาก

ถ้า  $AB$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ  $C$  เป็นจุดอื่นบนวงกลม

$$\angle ACB = 90^\circ, \quad AC^2 + BC^2 = AB^2$$

ในทางกลับกัน ถ้า  $\angle ACB = 90^\circ$  จุด  $C$  จะอยู่บนวงกลมที่มี  $AB$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

**ตัวอย่าง 4** สามเหลี่ยม  $ABC$  อยู่ในวงกลม โดย  $AB$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 13 หน่วย และ  $AC = 5$  หน่วย จงหา  $BC$

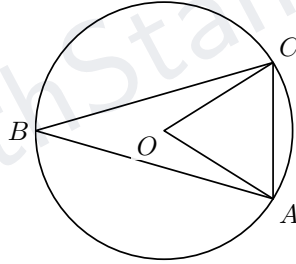
**วิธีคิด** มุม  $ACB$  เป็นมุมฉาก จึงมี  $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 13^2 - 5^2 = 144$  เลือกความยาวบวกได้  $BC = 12$

**ตอบ** 12 หน่วย

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-2

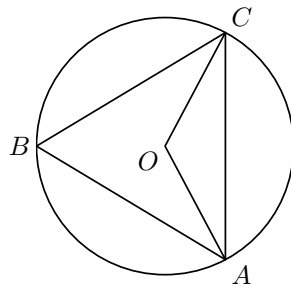
## วงกลมและมุมพื้นฐาน

**ข้อ 1** จุด  $A, B, C$  อยู่บนวงกลมศูนย์กลาง  $O$  โดย  $B$  อยู่บนส่วนโค้งใหญ่  $AC$  และ  $\angle ABC = 32^\circ$  จงหา มุม  $AOC$  ที่รองรับส่วนโค้งเล็ก  $AC$



ตอบ \_\_\_\_\_

**ข้อ 2** ในวงกลมศูนย์กลาง  $O$  มี  $\angle AOC = 124^\circ$  และ  $B$  อยู่บนส่วนโค้งใหญ่  $AC$  จงหา  $\angle ABC$



ตอบ \_\_\_\_\_

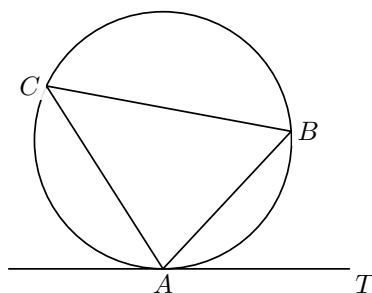
เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2

## มุมจากคอร์ด เส้นตัด และเส้นสัมผัส

### 2.1 มุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด

เส้นสัมผัสวงกลมมีจุดร่วมกับวงกลมเพียงจุดเดียว เรียกจุดดังกล่าวว่าจุดสัมผัส รัศมีที่ผ่านจุดสัมผัสตั้งฉากกับเส้นสัมผัส

มุมระหว่างเส้นสัมผัส กับ คอร์ด ที่ออกจาก จุดสัมผัส เท่ากับ มุมบน เส้นรอบวง ที่รองรับ คอร์ด เดียวกันใน ส่วนโค้งตรงข้ามกับมุมนั้น



#### มุมในส่วนโค้งตรงข้าม

ให้  $AT$  เป็นเส้นสัมผัสที่  $A$  และ  $AB$  เป็นคอร์ด ถ้า  $C$  อยู่บนส่วนโค้งตรงข้ามกับมุม  $TAB$

$$\angle TAB = \angle ACB$$

**ตัวอย่าง 8** เส้น  $AT$  สัมผัสวงกลมที่  $A$  และ  $\angle ACB = 52^\circ$  โดย  $C$  อยู่ในส่วนโค้งตรงข้ามมุม  $TAB$  จงหา  $\angle TAB$

**วิธี คิด** มุม ระหว่าง เส้นสัมผัส กับ คอร์ด เท่ากับ มุม ที่ รองรับ คอร์ด เดียวกัน ใน ส่วนโค้ง ตรงข้าม จึง ได้  $\angle TAB = 52^\circ$

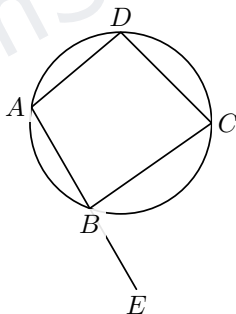
**ตอบ**  $52^\circ$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

## มุมจากคอร์ด เส้นตัด และเส้นสัมผัส

### 2.2 มุมภายนอกของสี่เหลี่ยมในวงกลม

เมื่อต่อต้านของสี่เหลี่ยมในวงกลม มุมภายนอกที่เกิดขึ้นเท่ากับมุมภายในตรงข้าม เนื่องจากมุมทั้งสองเป็นมุมเสริมของมุมภายในเดียวกัน



#### ใช้ผลบวกมุมบนเส้นตรง

ให้  $ABCD$  เป็นสี่เหลี่ยมในวงกลม และต่อ  $AB$  ผ่าน  $B$  ถึง  $E$

$$\angle EBC + \angle ABC = 180^\circ$$

$$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$$

จึงสรุปได้ว่า  $\angle EBC = \angle ADC$

**ตัวอย่าง 9** มุมภายนอกที่  $B$  ของสี่เหลี่ยมในวงกลมเท่ากับ  $(5x - 6)^\circ$  และมุมภายในตรงข้ามเท่ากับ  $84^\circ$

จงหา  $x$

**วิธีคิด** มุมทั้งสองเท่ากัน จึงมี  $5x - 6 = 84$  ได้  $5x = 90$  และ  $x = 18$

**ตอบ** 18

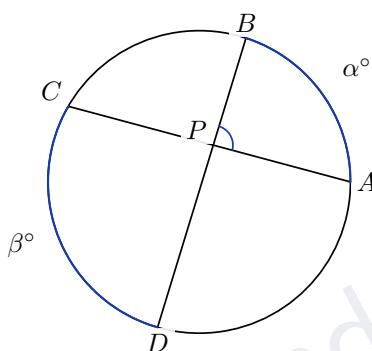
เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

## มุมจากคอร์ด เส้นตัด และเส้นสัมผัส

### 2.3 มุมจากคอร์ดที่ตัดกันภายในวงกลม

คอร์ดสองเส้นที่ตัดกันภายในวงกลมทำให้เกิดมุมคู่ตรงข้าม ส่วนโค้งที่รองรับมุมคู่ตรงข้ามคู่นั้นกำหนดขนาดของมุมที่จุดตัด

การพิสูจน์อาศัยการเชื่อมปลายคอร์ดเป็นสามเหลี่ยม แล้วใช้ทฤษฎีบทมุมภายนอกของสามเหลี่ยมร่วมกับมุมบนเส้นรอบวง ในรูป ส่วนโค้งที่เน้นมีขนาด  $\alpha, \beta$  องศา



#### ครึ่งผลบวกของขนาดส่วนโค้ง

ให้  $A, B, C, D$  เรียงตามวงกลม และคอร์ด  $AC, BD$  ตัดกันที่  $P$  ให้ส่วนโค้ง  $AB, CD$  ที่รองรับมุมคู่ตรงข้ามมีขนาด  $\alpha, \beta$  องศา

$$\angle APB = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

ค่า  $\alpha, \beta$  เป็นขนาดส่วนโค้งในหน่วยองศา ไม่ใช่ความยาวส่วนโค้ง

**ตัวอย่าง 10** คอร์ด  $AC, BD$  ตัดกันที่  $P$  มี  $\angle APB = 75^\circ$  และส่วนโค้ง  $AB$  ขนาด  $64^\circ$  จงหาส่วนโค้ง  $CD$  ที่สอดคล้องกัน

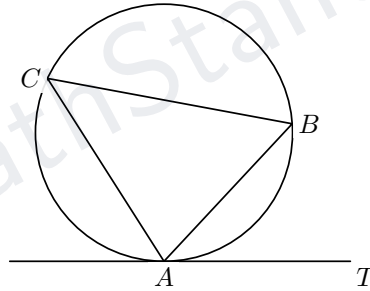
**วิธีคิด** ให้ขนาดส่วนโค้ง  $CD$  เป็น  $x$  องศา จะได้  $75 = (64 + x)/2$  จึงมี  $150 = 64 + x$  และ  $x = 86$

**ตอบ**  $86^\circ$

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 2 | ข้อ 11-12

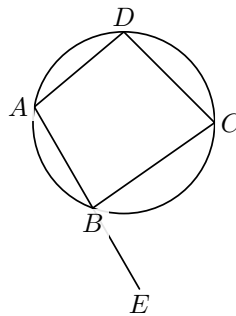
## มุมจากคอร์ด เส้นตัด และเส้นสัมผัส

**ข้อ 11** เส้นตรง  $AT$  สัมผัสวงกลมที่  $A$  และ  $\angle TAB = 47^\circ$  จุด  $C$  อยู่บนส่วนโค้งใหญ่  $AB$  ในด้านตรงข้ามกับมุม  $TAB$  จงหา  $\angle ACB$



ตอบ \_\_\_\_\_

**ข้อ 12** สี่เหลี่ยม  $ABCD$  มีจุดยอดบนวงกลม ต่อกับ  $AB$  ผ่าน  $B$  ถึง  $E$  ถ้า  $\angle EBC = (4x + 7)^\circ$  และ  $\angle ADC = 95^\circ$  จงหา  $x$



ตอบ \_\_\_\_\_