



MathStandard

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์

ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต

คำชี้แจง

จัดทำโดย MathStandard

ฉบับ 1.2

เอกสารประกอบการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต มุ่งพัฒนาความเข้าใจเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตในระนาบ การอธิบายความสัมพันธ์จากเงื่อนไข และการใช้เหตุผลอย่างเป็นลำดับ

เนื้อหาเริ่มจากจุด เส้นตรง และมุม แล้วพัฒนาไปสู่มุมของรูปหลายเหลี่ยม สามเหลี่ยมหน้าจั่ว เส้นขนาน เส้นสำคัญและ จุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยม การแบ่งด้านและอัตราส่วนพื้นที่ ตลอดจนจุดกึ่งกลางในสี่เหลี่ยมคางหมู โดยเชื่อมโยงสมบัติของรูปเข้ากับอัตราส่วน พีชคณิต และพีกัต

ขอบเขต ครอบคลุม พื้นฐาน ระดับมัธยมศึกษา ตอนต้น การ ประยุกต์ ใน การ เตรียมสอบ เข้า ศึกษา ต่อ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4 และแนวข้อสอบแข่งขันที่เกี่ยวข้อง โดยเชื่อมโยงเรขาคณิตกับพีชคณิตและพีกัต ผู้เรียนควรมีพื้นฐานการแก้สมการเชิงเส้น อัตราส่วน พื้นที่สามเหลี่ยม และทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ข้อตกลงและสัญลักษณ์

- ใช้อักษรพิมพ์ใหญ่แทนชื่อจุด สัญลักษณ์ $\angle ABC$ มีจุดยอดที่ B และขนาดมุมในเอกสารใช้หน่วยองศา
- AB แทนความยาวของส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ เมื่อใช้ในสมการเกี่ยวกับความยาว ส่วน $D \in BC$ หมายถึงจุด D อยู่บนส่วนของเส้นตรง BC ตามเงื่อนไขที่ระบุ
- เมื่อใช้ความยาวด้าน a, b, c ในสามเหลี่ยม ABC กำหนด $a = BC, b = CA, c = AB$ ให้ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ
- ใช้ $\text{Area}(\triangle ABC)$ แทนพื้นที่สามเหลี่ยม ABC และระบุชื่อรูปกำกับเมื่อพิจารณาหลายรูป
- $AB \parallel CD$ หมายถึงเส้นทั้งสองขนานกัน และ $AB \perp CD$ หมายถึงเส้นทั้งสองตั้งฉากกัน
- ความยาวและพื้นที่ต้องใช้หน่วยที่สอดคล้องกัน คำตอบใช้ค่าที่แน่นอน เว้นแต่กำหนดให้ประมาณค่า
- รูปประกอบแสดงตำแหน่งและความสัมพันธ์ ให้ใช้เงื่อนไขที่กำหนดในการพิสูจน์และคำนวณ ไม่ใช้การวัดจากรูปแทนเหตุผล

เรียบเรียงโดย MathStandard สำหรับใช้ประกอบการเรียนการสอน

ข้อมูลเพิ่มเติม www.mathstandard.com

เรื่อง พื้นฐานทางเรขาคณิต

สารบัญ

ตอนที่ 1 มุมพื้นฐานและการไล่มุม

เนื้อหาและตัวอย่าง	3
แบบฝึกหัดข้อ 1–10	14

ตอนที่ 2 สามเหลี่ยมหน้าจั่วและด้านที่เท่ากัน

เนื้อหาและตัวอย่าง	19
แบบฝึกหัดข้อ 11–20	26

ตอนที่ 3 เส้นขนานและเส้นตัด

เนื้อหาและตัวอย่าง	31
แบบฝึกหัดข้อ 21–30	36

ตอนที่ 4 เส้นสำคัญและจุดศูนย์กลางของสามเหลี่ยม

เนื้อหาและตัวอย่าง	42
แบบฝึกหัดข้อ 31–40	53

ตอนที่ 5 การแบ่งด้านและอัตราส่วนพื้นที่

เนื้อหาและตัวอย่าง	58
แบบฝึกหัดข้อ 41–54	69

ตอนที่ 6 จุดกึ่งกลางในสี่เหลี่ยมคางหมู

เนื้อหาและตัวอย่าง	77
แบบฝึกหัดข้อ 55–64	82

เฉลยคำตอบ	87
-----------	----

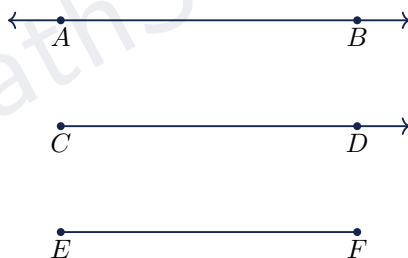
เฉลยวิธีคิดอย่างย่อ	90
---------------------	----

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1

มุมพื้นฐานและการไล่มุม

1.1 จุด เส้นตรง รังสี และส่วนของเส้นตรง

เรขาคณิตศึกษาตำแหน่ง รูปร่าง ขนาด และความสัมพันธ์ของรูป จุดใช้ระบุตำแหน่งและไม่มีขนาด นิยมกำหนดชื่อด้วยอักษรพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C ส่วนเส้นตรงทอดยาวออกไปได้ทั้งสองทิศทาง



หัวลูกศรบอกทิศทางที่เส้นทอดยาวต่อไปได้

สิ่งที่พิจารณา	สัญลักษณ์	ความหมาย
เส้นตรงผ่าน A, B	$\overleftrightarrow{AB}$	ไม่มีจุดปลาย และไม่จำกัดความยาว
รังสีจาก C ผ่าน D	$\overrightarrow{CD}$	มีจุดปลายที่ C เพียงจุดเดียว
ส่วนของเส้นตรง EF	$\overline{EF}$	มีจุดปลายสองจุด คือ E, F

ความยาวและจุดกึ่งกลาง

ในสมการเกี่ยวกับความยาว ใช้ AB แทนความยาวของ $\overline{AB}$ หากจุด A, M, B อยู่บนเส้นตรงเดียวกันตามลำดับ จะมี $AB = AM + MB$ และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB ก็ต่อเมื่อ $AM = MB$

สมบัติพื้นฐานของเส้นตรง

มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวผ่านจุดที่แตกต่างกันสองจุด ส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นมีจุดกึ่งกลางเพียงจุดเดียว

ตัวอย่าง 1 จุด A, M, B อยู่บนเส้นตรงเดียวกันตามลำดับ ถ้า $AB = 18$ เซนติเมตร และ M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB จงหา AM

วิธีคิด จากนิยามจุดกึ่งกลางมี $AM = MB$ และ $AM + MB = 18$ จึงได้ $2AM = 18$ ดังนั้น $AM = 9$ เซนติเมตร

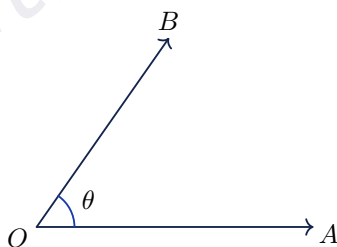
ตอบ 9 เซนติเมตร

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

มุมพื้นฐานและการไล่มุม

1.2 มุมและการอ่านชื่อมุม

มุมเกิดจากรังสีสองเส้นที่มีจุดปลายร่วมกัน จุดปลายร่วมเรียกว่า **จุดยอดของมุม** และรังสีทั้งสองเรียกว่า **แขนของมุม** สัญลักษณ์ $\angle AOB$ หมายถึงมุมที่มีจุดยอด O และแขนเป็นรังสี OA, OB ตัวอักษรที่อยู่ตรงกลางจึงเป็นชื่อจุดยอดเสมอ



มุม AOB มีขนาด θ และมีจุดยอดที่ O

ชนิดของมุม	ขนาดมุม
มุมแหลม	มากกว่า 0° แต่น้อยกว่า 90°
มุมฉาก	เท่ากับ 90°
มุมป้าน	มากกว่า 90° แต่น้อยกว่า 180°
มุมตรง	เท่ากับ 180°
มุมกลับ	มากกว่า 180° แต่น้อยกว่า 360°

เครื่องหมายที่ใช้ในรูป

เครื่องหมายสี่เหลี่ยมเล็กแสดงมุมฉาก เครื่องหมายขีดแบบเดียวกันบนด้านแสดงความยาวเท่ากัน และเครื่องหมายส่วนโค้งแบบเดียวกันแสดงขนาดมุมเท่ากัน ต้องใช้ข้อมูลเหล่านี้ร่วมกับเงื่อนไขที่กำหนด ไม่อนุมานจากลักษณะภาพเพียงอย่างเดียว

ตัวอย่าง 2 รังสี OC อยู่ภายในมุมฉาก AOB และ $\angle AOC = 32^\circ$ จงหา $\angle COB$

วิธีคิด เนื่องจาก OC แบ่งมุม AOB ออกเป็นสองส่วนที่ไม่ทับกัน จึงมี $\angle AOC + \angle COB = 90^\circ$ ดังนั้น $\angle COB = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$

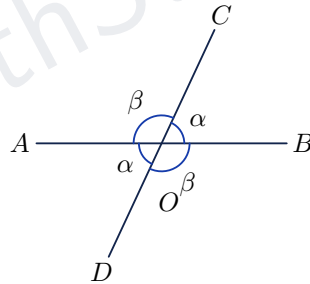
ตอบ 58°

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

มุมพื้นฐานและการไล่มุม

1.3 มุมบนเส้นตรง มุมรอบจุด และมุมตรงข้าม

มุมประชิดบนเส้นตรงมีแขนด้านนอกเป็นรังสีตรงข้ามกัน จึงมีผลรวม 180° ส่วนมุมที่แบ่งบริเวณรอบจุดครบหนึ่งรอบโดยไม่ทับกันมีผลรวม 360°

เส้นตรง AB และ CD ตัดกันที่ O

ความสัมพันธ์ของมุมเมื่อเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

มุมตรงข้ามกันมีขนาดเท่ากัน และมุมประชิดแต่ละคู่มีผลรวม 180°

$$\angle BOC = \angle AOD = \alpha \quad \angle AOC = \angle BOD = \beta$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

เหตุที่มุมตรงข้ามเท่ากันพิจารณาได้จาก $\angle BOC + \angle COA = 180^\circ$ และ $\angle COA + \angle AOD = 180^\circ$ เมื่อลบมุม COA ที่มีร่วมกันจึงได้ $\angle BOC = \angle AOD$

ตัวอย่าง 3 เส้นตรง AB และ CD ตัดกันที่ O ถ้า $\angle BOC = (3x + 12)^\circ$ และ $\angle AOD = (5x - 18)^\circ$

จงหา x และขนาดมุม BOC

วิธีคิด มุมตรงข้ามเท่ากัน จึงได้ $3x + 12 = 5x - 18$ ดังนั้น $2x = 30$ และ $x = 15$ แทนค่ากลับได้ $\angle BOC = 3(15) + 12 = 57^\circ$

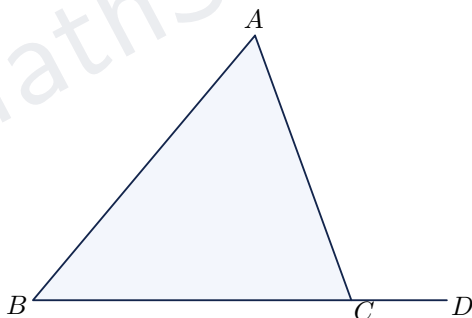
ตอบ $x = 15$ และ $\angle BOC = 57^\circ$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

มุมพื้นฐานและการไล่มุม

1.4 มุมภายในและมุมภายนอกของสามเหลี่ยม

มุมภายในทั้งสามของสามเหลี่ยมมีผลรวม 180° หากต่อด้านหนึ่งออกไป มุมที่เกิดระหว่างส่วนต่อกับด้านข้างเรียกว่า **มุมภายนอก** ซึ่งประชิดกับมุมภายในที่จุดยอดเดียวกัน



ต่อ BC ผ่าน C ถึง D จะได้มุมภายนอก ACD

มุมของสามเหลี่ยม

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$$

สูตรมุมภายนอกใช้ผลบวกของมุมภายในสองมุมที่ไม่ประชิดกับมุมภายนอกนั้น

จาก $\angle ACD = 180^\circ - \angle ACB$ และ $\angle BAC + \angle ABC = 180^\circ - \angle ACB$ จึงได้สูตรมุมภายนอกข้างต้นหลักเดียวกันนี้ใช้ได้เมื่อหมุนหรือเปลี่ยนตำแหน่งของรูป

ตัวอย่าง 4 สามเหลี่ยม ABC มี $\angle BAC = 57^\circ$ และ $\angle ABC = 68^\circ$ ต่อ BC ผ่าน C ถึง D จงหา $\angle ACB$ และ $\angle ACD$

วิธีคิด มุมภายในที่เหลือเท่ากับ $180^\circ - 57^\circ - 68^\circ = 55^\circ$ ส่วนมุมภายนอก $ACD = 57^\circ + 68^\circ = 125^\circ$ ซึ่งรวมกับมุม ACB ได้ 180°

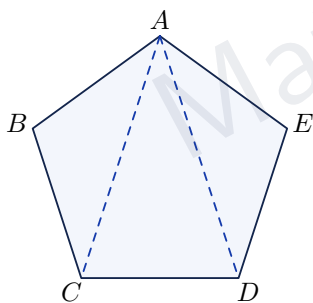
ตอบ $\angle ACB = 55^\circ$ และ $\angle ACD = 125^\circ$

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 1 (ต่อ)

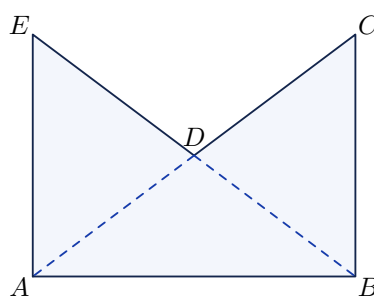
มุมพื้นฐานและการไล่มุม

1.5 ผลรวมมุมภายในของรูปหลายเหลี่ยม

รูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย มีขอบไม่ตัดกันเอง ยกเว้นด้านที่ประชิดกันพบกันที่จุดยอดรวม รูปหลายเหลี่ยม
 นูนมีมุมภายในทุกมุมน้อยกว่า 180° ส่วนรูปหลายเหลี่ยมเว้ามีมุมภายในบางมุมมากกว่า 180°



รูปห้าเหลี่ยมนูน



รูปห้าเหลี่ยมเว้า

ผลรวมมุมภายใน: ใช้ได้ทั้งรูปนูนและรูปเว้า

ให้ n เป็นจำนวนด้านของรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย โดย $n \geq 3$ แล้ว

$$\text{ผลรวมมุมภายใน} = 180^\circ \times (n - 2)$$

สำหรับรูปเว้า ต้องนับมุมภายในที่จุดเว้าเป็นมุมกลับด้วย

รูปหลายเหลี่ยมอย่างง่ายแบ่งเป็นสามเหลี่ยมที่ไม่ทับซ้อนกันได้ $n - 2$ รูป จึงมีผลรวมมุมเท่ากับ 180°
 จำนวน $n - 2$ ชุด ในรูปห้าเหลี่ยมทั้งสองข้างต้นแบ่งได้รูปละ 3 สามเหลี่ยม จึงมีผลรวมมุมภายในเท่ากันคือ
 540° สำหรับรูปเว้า ต้องเลือกเส้นทแยงมุมที่อยู่ภายในรูป

ตัวอย่าง 5 รูปห้าเหลี่ยมเว้ามีมุมภายในสี่มุมเท่ากับ $80^\circ, 90^\circ, 70^\circ, 220^\circ$ จงหามุมภายในที่เหลือ

วิธีคิด ผลรวมมุมภายในเท่ากับ $180^\circ(5 - 2) = 540^\circ$ จึงได้มุมที่เหลือ

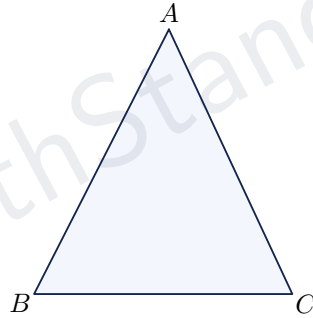
$$540^\circ - (80^\circ + 90^\circ + 70^\circ + 220^\circ) = 80^\circ$$

ตอบ 80°

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 1 | ข้อ 1-2

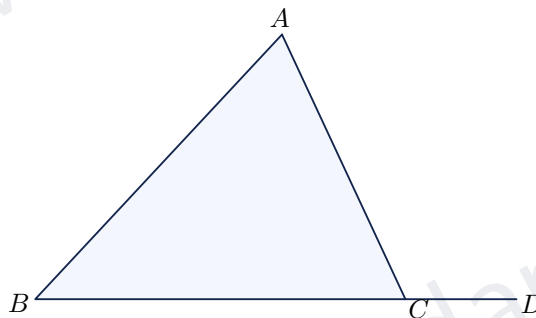
มุมพื้นฐานและการไล่มุม

ข้อ 1 แผ่นป้ายรูปสามเหลี่ยม ABC มี $\angle BAC = 52^\circ$ และ $\angle ABC = 63^\circ$ จงหา $\angle ACB$



ตอบ _____

ข้อ 2 สามเหลี่ยม ABC มีมุมที่ A และ B เท่ากับ 68° และ 47° ตามลำดับ ต่อ BC ผ่าน C ถึง D จงหา $\angle ACD$



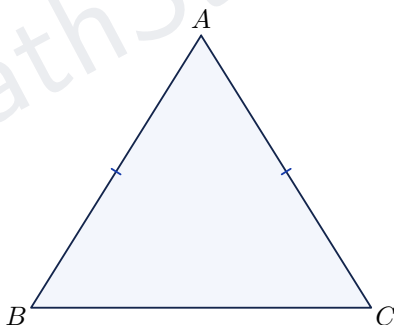
ตอบ _____

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2

สามเหลี่ยมหน้าจั่วและด้านที่เท่ากัน

2.1 ด้านที่เท่ากันและมุมฐาน

สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน เรียกด้านที่เหลือว่า **ฐาน** มุมระหว่างด้านที่เท่ากันเรียกว่า **มุมยอด** ส่วนมุมที่มีจุดยอดอยู่ที่ปลายฐานเรียกว่า **มุมฐาน**



เมื่อ $AB = AC$ ฐานคือ BC และมุมยอดคือ $\angle BAC$

สมบัติและบทกลับ

$$AB = AC \iff \angle ABC = \angle BCA$$

หากมุมยอดมีขนาด α และมุมฐานแต่ละมุมมีขนาด β จะได้

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad \beta = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

สมบัตินี้เชื่อมโยง **ด้านที่เท่ากัน** กับ **มุมที่อยู่ตรงข้ามด้านเหล่านั้น** ไม่ควรสรุปจากรูปร่างที่มองเห็นเพียงอย่างเดียว ในสามเหลี่ยมด้านเท่า ด้านทั้งสามเท่ากัน จึงมีมุมทั้งสามเท่ากับ 60°

ตัวอย่าง 12 สามเหลี่ยม ABC มี $AB = AC$ และ $\angle BAC = 46^\circ$ จงหามุมภายนอกที่ประชิดมุม ABC

วิธีคิด มุมฐานแต่ละมุมเท่ากับ $(180^\circ - 46^\circ)/2 = 67^\circ$ มุมภายนอกที่ประชิดมุมฐานมีผลบวกกับมุมฐานเป็น 180° จึงเท่ากับ $180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$

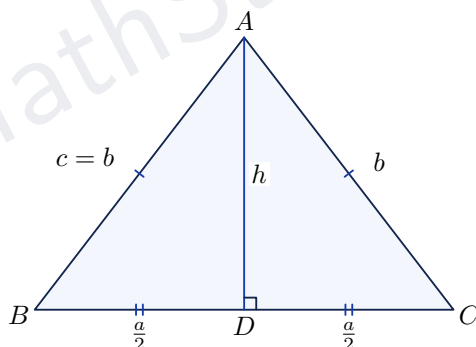
ตอบ 113°

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

สามเหลี่ยมหน้าจั่วและด้านที่เท่ากัน

2.2 เส้นจากมุมยอดถึงจุดกึ่งกลางฐาน

ให้ $AB = AC$ และ D เป็นจุดกึ่งกลางของฐาน BC สามเหลี่ยม ABD และ ACD เท่ากันทุกประการจากด้านสามคู่ คือ $AB = AC$, $BD = DC$ และ AD เป็นด้านร่วม จึงได้มุมที่สมนัยกันเท่ากัน



กำหนด $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ และ $h = AD$ โดย $b = c$

มุม ADB และ ADC เท่ากันและรวมกันเป็น 180° จึงเป็นมุมฉากทั้งคู่ อีกทั้ง AD แบ่งครึ่งมุมยอด ดังนั้นเส้นเดียวกันนี้เป็นทั้งมัธยฐาน เส้นสูง และเส้นแบ่งครึ่งมุม

ความยาวและพื้นที่ของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$BD = DC = \frac{a}{2} \quad h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\text{Area}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}ah \quad P = a + 2b$$

โดย P แทนความยาวรอบรูป และ $b > a/2$

ตัวอย่าง 13 สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว 10 เซนติเมตร และด้านที่เท่ากันยาวด้านละ 13 เซนติเมตร จงหาพื้นที่

วิธีคิด ลากเส้นสูงจากมุมยอด เส้นสูงแบ่งฐานครึ่งละ 5 เซนติเมตร ให้ h แทนความสูง จากพีทาโกรัสได้ $h^2 = 13^2 - 5^2 = 144$ จึงมี $h = 12$ เซนติเมตร พื้นที่เท่ากับ $\frac{1}{2}(10)(12) = 60$ ตารางเซนติเมตร

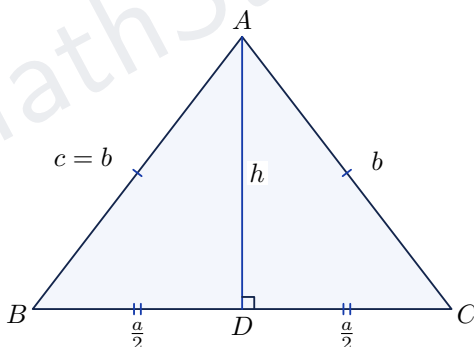
ตอบ 60 ตารางเซนติเมตร

เนื้อหาและตัวอย่าง | ตอนที่ 2 (ต่อ)

สามเหลี่ยมหน้าจั่วและด้านที่เท่ากัน

2.3 หาความยาวด้านจากพื้นที่และรอบรูป

เมื่อทราบพื้นที่และฐาน ควรหาความสูงจากสูตรพื้นที่ก่อน แล้วจึงใช้สามเหลี่ยมมุมฉากที่เกิดจากการแบ่งครึ่งฐาน หาความยาวด้านที่เท่ากัน



เส้นสูง AD เป็นด้านหนึ่งของสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD

การย้อนหาความยาวด้าน

กำหนด $a = BC$ และใช้ Area แทนพื้นที่ของสามเหลี่ยมนี้

$$h = \frac{2\text{Area}}{a} \quad b = c = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

ถ้าทราบความยาวรอบรูป P และฐาน a จะได้ $b = c = (P - a)/2$

เมื่อแทนค่าพื้นที่ให้ตรวจหน่วย โดยพื้นที่ต้องใช้หน่วยกำลังสองที่สอดคล้องกับหน่วยของฐาน

ตัวอย่าง 14 แผ่นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐาน 14 เซนติเมตร และพื้นที่ 168 ตารางเซนติเมตร จงหาความยาวรอบรูป

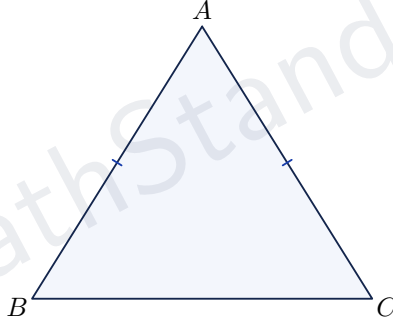
วิธีคิด ให้ h เป็นความสูง และ b เป็นความยาวด้านที่เท่ากันแต่ละด้าน ได้ $h = 2(168)/14 = 24$ เซนติเมตร ครึ่งฐานยาว 7 เซนติเมตร จึงมี $b = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ เซนติเมตร ความยาวรอบรูปจึงเท่ากับ $14 + 2(25) = 64$ เซนติเมตร

ตอบ 64 เซนติเมตร

แบบฝึกหัด | ตอนที่ 2 | ข้อ 11-12

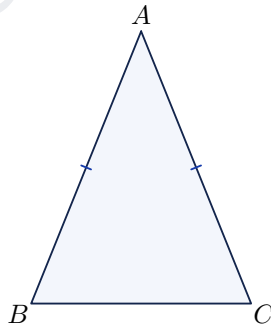
สามเหลี่ยมหน้าจั่วและด้านที่เท่ากัน

ข้อ 11 สามเหลี่ยม ABC มี $AB = AC$ และ $\angle ABC = 58^\circ$ จงหา $\angle BAC$



ตอบ _____

ข้อ 12 โครงรูปสามเหลี่ยม ABC มี $AB = AC$ และมุมยอด $BAC = 44^\circ$ จงหา $\angle ACB$



ตอบ _____