



MathStandard

ตัวอย่างข้อสอบเก่า

เรียงเรียงใหม่

เตรียมความพร้อมเข้า ม.4

วิชาคณิตศาสตร์

โครงการห้องเรียนวิทยาศาสตร์ วมว. รอบ 2

ชุดอ้างอิง 03

เอกสารแจกฟรีเพื่อการศึกษา

คำชี้แจง

ชุดอ้างอิง 03 | ฉบับ 1.3

เอกสารแจกฟรีเพื่อการศึกษา

เอกสารตัวอย่างข้อสอบเก่า วิชาคณิตศาสตร์ สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 โครงการห้องเรียนวิทยาศาสตร์ วมว. รอบ 2

จัดทำโดย MathStandard

ข้อสอบในชุดนี้ครอบคลุมเลขยกกำลัง กรณที่ สมการ ความน่าจะเป็น ตัวหารร่วมมาก สถิติ เรขาคณิต อัตราส่วนตรีโกณมิติ พื้นที่ผิว และปริมาตร

ข้อสอบมีจำนวน 10 ข้อ แบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่	ข้อ	รูปแบบการตอบ
1	1-5	เติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ
2	6-10	แสดงวิธีทำ จำนวน 5 ข้อ

- ตอนที่ 1 ข้อ 1-5 เขียนเฉพาะคำตอบในช่องที่กำหนด
- ตอนที่ 2 ข้อ 6-10 แสดงวิธีทำและเหตุผลทางคณิตศาสตร์ตามลำดับ และระบุคำตอบในช่องท้ายข้อ
- คำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็มให้เขียนเป็นเศษส่วนหรือกรณที่ในรูปอย่างง่าย และคงค่า π ไว้ เว้นแต่โจทย์กำหนดเป็นอย่างอื่น พร้อมระบุหน่วยเมื่อจำเป็น
- รูปประกอบอาจไม่เป็นไปตามมาตราส่วน การคำนวณให้ใช้ข้อมูลและเงื่อนไขที่ระบุในโจทย์
- เฉลยคำตอบและวิธีทำอยู่ท้ายเล่ม เรียงตามลำดับข้อ

เอกสารนี้จัดทำโดย MathStandard เพื่อประกอบการเตรียมสอบ ชื่อโรงเรียน และโครงการที่ปรากฏใช้เพื่อระบุการสอบเป้าหมายเท่านั้น เอกสารนี้ไม่ใช่ข้อสอบทางการ และไม่ได้จัดทำร่วมกับหรือได้รับการรับรองจากหน่วยงานเจ้าของ การสอบ

สารบัญ

รายการ	หน้า
คำชี้แจง	1
ข้อสอบ	3–12
ตอนที่ 1 เติมคำตอบ ข้อ 1–5	3–7
ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ ข้อ 6–10	8–12
เฉลยคำตอบ	13
วิธีทำ	14–23

วิธีทำรายข้อ

ข้อ 1 การเพิ่มจำนวนและเลขยกกำลัง	14
ข้อ 2 สมการและนิพจน์กรณฑ์	15
ข้อ 3 สามเหลี่ยมด้านเท่าและมุม	16
ข้อ 4 พื้นที่สามเหลี่ยมและอัตราส่วนตรีโกณมิติ	17
ข้อ 5 ความน่าจะเป็นและสมการกำลังสอง	18
ข้อ 6 เศษส่วนแท้และตัวหารร่วมมาก	19
ข้อ 7 มัธยฐานและแผนภาพกล่อง	20
ข้อ 8 พื้นที่ผิวและปริมาตรกล่อง	21
ข้อ 9 เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม	22
ข้อ 10 ปริมาตรลูกบาศก์หลังตัด	23

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 1 ในแบบจำลองการเพิ่มจำนวนแบคทีเรีย เดิมมีแบคทีเรีย 625^{37} ตัวต่อลูกบาศก์เซนติเมตร โดยจำนวนแบคทีเรียเพิ่มเป็น 2 เท่าทุก ๆ $\frac{1}{5}$ นาที จงหาว่าต้องใช้เวลาอย่างน้อยกี่นาที จึงจะมีแบคทีเรีย 10^{154} ตัวต่อลูกบาศก์เมตร

ตอบ _____

พื้นที่ทด

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 2 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{x-1}{11} - \frac{1}{x-1} = 0$$

จงหาค่าของนิพจน์

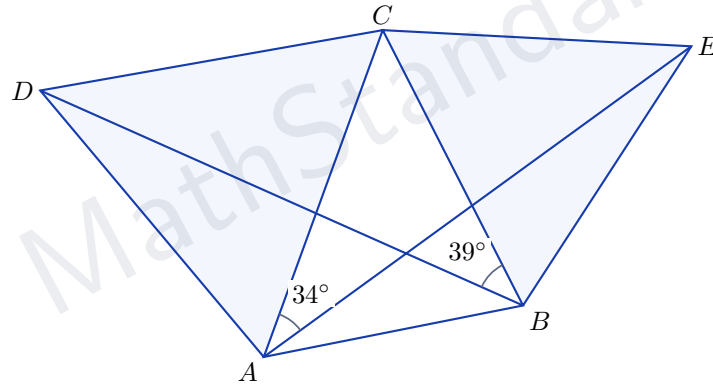
$$x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81 - 432\sqrt{11}$$

ตอบ _____

พื้นที่ทด

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 3 สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ADC และ BEC ภายนอกรูปสามเหลี่ยม CAB บนด้าน AC และ BC ตามลำดับ ถ้า $\angle CBD = 39^\circ$ และ $\angle CAE = 34^\circ$ จงหาขนาดของ $\angle ACB$

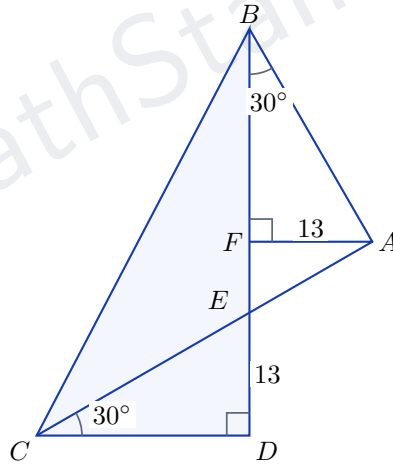


ตอบ _____

พื้นที่ทด

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 4 จุด B, F, E, D อยู่บนเส้นตรงเดียวกันตามลำดับ และจุด C, E, A อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน โดย $AF \perp BD$ และ $CD \perp BD$ กำหนดให้ $\angle ABD = \angle ACD = 30^\circ$ และ $AF = DE = 13$ นิ้ว จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCD เป็นตารางนิ้ว



ตอบ _____

พื้นที่ที่หาคือ

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 5 มีบัตรตัวเลข 8 ใบ เขียนเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ไว้ใบละหนึ่งจำนวน สุ่มหยิบบัตรสองครั้ง โดยใส่บัตรคืนก่อนหยิบครั้งที่สอง และบัตรแต่ละใบมีโอกาสถูกเลือกเท่ากัน ให้ a เป็นเลขที่ได้จากการหยิบครั้งแรก และ b เป็นเลขที่ได้จากการหยิบครั้งที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่สมการ

$$x^2 + ax + b = 0$$

มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว

ตอบ _____

พื้นที่ทด

ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ

ข้อ 6 กำหนดให้ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนแท้ โดย a, b เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีตัวหารร่วมมากเท่ากับ 6 และ $a + b = 120$ จงหาผลรวมของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $b^2 - a^2$

วิธีทำ

ตอบ _____

ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ

ข้อ 7 สํารวจเวลาที่ใช้ในการอ่านหนังสือของนักเรียนชาย 40 คน และนักเรียนหญิง 23 คน โดยข้อมูลของนักเรียนแต่ละกลุ่มไม่ซ้ำกัน แผนภาพกล่องต่อไปนี้แสดงเวลาของนักเรียนหญิง



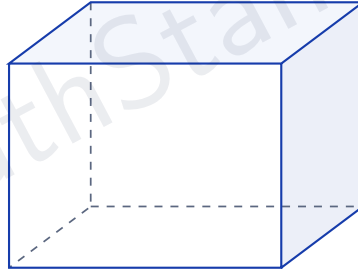
นักเรียนชายมีมัธยฐานเท่ากับ 8 ชั่วโมง และค่าสูงสุดเท่ากับ 30 ชั่วโมง ในกลุ่มนักเรียนที่ใช้เวลาอ่านหนังสือตั้งแต่ 8 ถึง 30 ชั่วโมง โดยนับรวมค่าปลายทั้งสองด้าน มีนักเรียนชายมากกว่านักเรียนหญิงกี่คน

กำหนดให้ตำแหน่งของควอไทล์ Q_r เท่ากับ $\frac{r(n+1)}{4}$ เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก โดย n คือจำนวนข้อมูล และ $r = 1, 2, 3$

วิธีทำ

ตอบ _____

ข้อ 8 กล่องปิดทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความกว้าง ความยาว และความสูง เมื่อวัดเป็นเซนติเมตร เป็นจำนวนเต็มบวกที่เรียงติดกัน ค่าตัวเลขของพื้นที่ผิวรวมเป็นตารางเซนติเมตรน้อยกว่าค่าตัวเลขของปริมาตรเป็นลูกบาศก์เซนติเมตรอยู่ 122 จงหาความยาวของด้านที่ยาวที่สุดเป็นเซนติเมตร

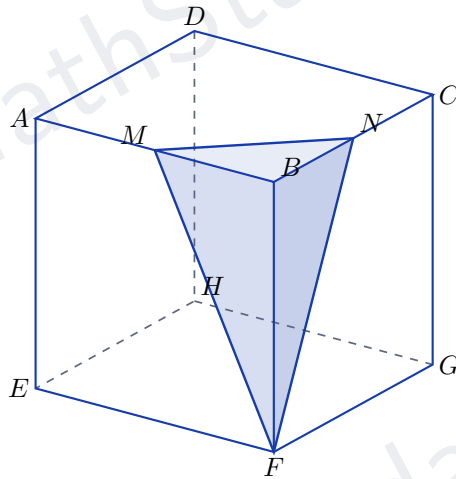


วิธีทำ

ตอบ _____

ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ

ข้อ 10 ลูกบาศก์ $ABCD.EFGH$ มีด้านยาวด้านละ 36 เซนติเมตร โดย AE, BF, CG, DH เป็นเส้นที่เชื่อมจุดคู่กันของหน้าบนและหน้าล่าง จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และจุด N เป็นจุดกึ่งกลางของ BC ตัดลูกบาศก์ด้วยระนาบที่ผ่านจุด M, N, F แล้วนำส่วนที่มีจุดยอด B ซึ่งแรเงาในรูปออก จงหาปริมาตรของส่วนที่เหลือ



วิธีทำ

ตอบ _____

เฉลยคำตอบ

ชุดอ้างอิง 03 | ฉบับ 1.3

ข้อ คำตอบ

- 1 $\frac{148}{5}$ นาที
 - 2 1433
 - 3 47°
 - 4 $338 + \frac{169\sqrt{3}}{2}$ ตารางนิ้ว
 - 5 $\frac{3}{64}$
 - 6 28 800
 - 7 7 คน
 - 8 9 เซนติเมตร
 - 9 $\frac{361}{28}$ หน่วย
 - 10 44 712 ลูกบาศก์เซนติเมตร
-

เอกสารนี้จัดทำโดย MathStandard เพื่อประกอบการเตรียมสอบ ชื่อโรงเรียน และโครงการที่ปรากฏใช้เพื่อระบุการสอบเป้าหมายเท่านั้น เอกสารนี้ไม่ใช่ข้อสอบทางการ และไม่ได้จัดทำร่วมกับหรือได้รับการรับรองจากหน่วยงานเจ้าของการสอบ

วิธีทำข้อ 1

การเพิ่มจำนวนและเลขยกกำลัง

แปลงหน่วยปริมาตรให้อยู่ในหน่วยเดียวกัน เนื่องจาก 1 เมตรเท่ากับ 100 เซนติเมตร จึงมี

$$1 \text{ ลูกบาศก์เมตร} = 100^3 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร} = 10^6 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

จำนวนแบคทีเรียเริ่มต้นต่อหนึ่งลูกบาศก์เมตรจึงเท่ากับ

$$625^{37} \times 10^6 = (5^4)^{37} \times 10^6 = 5^{148} \times 10^6$$

เทียบกับจำนวนเป้าหมาย 10^{154} ตัวต่อลูกบาศก์เมตร จะต้องเพิ่มจำนวนเป็น

$$\frac{10^{154}}{5^{148} \times 10^6} = \frac{10^{148}}{5^{148}} = 2^{148} \text{ เท่า}$$

ให้ k เป็นจำนวนครั้งที่แบคทีเรียเพิ่มเป็นสองเท่า จะมีตัวคูณการเพิ่มจำนวนเท่ากับ 2^k ดังนั้นต้องเพิ่มจำนวน 148 ครั้ง แต่ละครั้งใช้เวลา $\frac{1}{5}$ นาที จึงต้องใช้เวลาอย่างน้อย

$$148 \times \frac{1}{5} = \frac{148}{5} \text{ นาที}$$

ตอบ $\frac{148}{5}$ นาที

วิธีทำข้อ 2

สมการและนิพจน์กรณฑ์

จากสมการที่กำหนด $x \neq 1$ คูณทั้งสองข้างด้วย $11(x-1)$ ได้

$$(x-1)^2 - 11 = 0 \implies x = 1 \pm \sqrt{11}$$

เนื่องจาก $\sqrt{11} > 1$ และโจทย์กำหนด $x > 0$ จึงได้ $x = 1 + \sqrt{11}$

พหุนามที่ปรากฏในนิพจน์เป็นการกระจายของ $(x+3)^4$ จึงเขียนนิพจน์ที่ต้องการหาได้เป็น

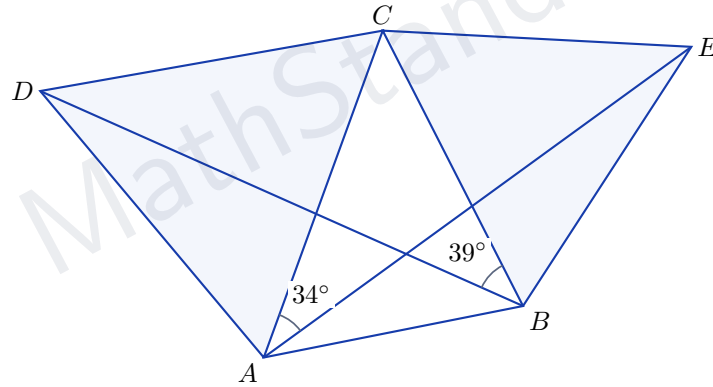
$$\begin{aligned} & (x+3)^4 - 432\sqrt{11} \\ &= (4 + \sqrt{11})^4 - 432\sqrt{11} \\ &= (16 + 8\sqrt{11} + 11)^2 - 432\sqrt{11} \\ &= (27 + 8\sqrt{11})^2 - 432\sqrt{11} \\ &= 729 + 432\sqrt{11} + 704 - 432\sqrt{11} \\ &= 1433 \end{aligned}$$

ตอบ 1433

วิธีทำข้อ 3

สามเหลี่ยมด้านเท่าและมุม

จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ADC และ BEC ได้ $CD = CA$, $CB = CE$ และ $\angle DCA = \angle BCE = 60^\circ$



เมื่อรวมมุม $\angle ACB$ เข้ากับมุม 60° ทั้งสองด้านของรูป จะได้

$$\angle DCB = 60^\circ + \angle ACB = \angle ACE$$

ดังนั้น $\triangle DCB \cong \triangle ACE$ โดยเกณฑ์ด้าน มุม ด้าน ทำให้มุมคู่ที่สมนัยกันเท่ากัน คือ

$$\angle CEA = \angle CBD = 39^\circ$$

พิจารณาผลรวมมุมภายในรูปสามเหลี่ยม ACE ได้

$$\angle ACE = 180^\circ - 34^\circ - 39^\circ = 107^\circ$$

เนื่องจาก $\angle ACE = \angle ACB + \angle BCE$ จึงมี

$$\angle ACB = 107^\circ - 60^\circ = 47^\circ$$

ตอบ 47°

วิธีทำข้อ 4

พื้นที่สามเหลี่ยมและอัตราส่วนตรีโกณมิติ

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABF และ $\angle ABF = 30^\circ$ ได้

$$\tan 30^\circ = \frac{AF}{BF} \implies BF = 13\sqrt{3} \text{ นิ้ว}$$

เนื่องจาก $AF \parallel CD$ มุมที่เส้น AC ทำกับ AF เท่ากับมุมที่ทำกับ CD จึงได้ $\angle EAF = 30^\circ$ พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก AEF จะได้

$$EF = AF \tan 30^\circ = \frac{13\sqrt{3}}{3} \text{ นิ้ว}$$

รวมความยาวบนเส้นตรง BD ตามลำดับจุด ได้

$$BD = BF + FE + ED = 13\sqrt{3} + \frac{13\sqrt{3}}{3} + 13 = 13 + \frac{52\sqrt{3}}{3}$$

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก CDE มี $\angle ECD = 30^\circ$ จึงได้

$$CD = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = 13\sqrt{3} \text{ นิ้ว}$$

ใช้ BD เป็นฐาน และ CD เป็นความสูง พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCD เท่ากับ

$$\frac{1}{2} \left(13 + \frac{52\sqrt{3}}{3} \right) (13\sqrt{3}) = 338 + \frac{169\sqrt{3}}{2} \text{ ตารางนิ้ว}$$

ตอบ $338 + \frac{169\sqrt{3}}{2}$ ตารางนิ้ว

วิธีทำข้อ 5

ความน่าจะเป็นและสมการกำลังสอง

การหยิบแต่ละครั้งเลือกได้ 8 จำนวน และใส่บัตรคืนก่อนหยิบครั้งต่อไป จึงมีคู่อันดับ (a, b) ที่มีโอกาสเท่ากันทั้งหมด $8 \times 8 = 64$ คู่

สมการกำลังสอง $x^2 + ax + b = 0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว เมื่อ

$$a^2 - 4b = 0 \iff b = \frac{a^2}{4}$$

เนื่องจาก a, b เป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 7 ค่า a ต้องเป็นจำนวนคู่ พิจารณาค่าที่เป็นไปได้ดังตาราง

a	$b = \frac{a^2}{4}$	เป็นเลขบนบัตรทั้งคู่
0	0	ใช่
2	1	ใช่
4	4	ใช่
6	9	ไม่ใช่

คู่ที่เป็นไปตามเงื่อนไขจึงมี $(0, 0), (2, 1), (4, 4)$ รวม 3 คู่ ดังนั้นความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{3}{64}$

ตอบ $\frac{3}{64}$

วิธีทำข้อ 6

เศษส่วนแท้และตัวหารร่วมมาก

จากเงื่อนไขที่ตัวหารร่วมมากของ a, b เท่ากับ 6 ให้ $a = 6u$ และ $b = 6v$ โดย u, v เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีตัวหารร่วมมากเท่ากับ 1

$$6u + 6v = 120 \implies u + v = 20$$

จาก $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนแท้ ได้ $u < v$ จึงมี $1 \leq u < 10$ อีกทั้งตัวหารร่วมมากของ u, v เท่ากับตัวหารร่วมมากของ $u, u + v$ ดังนั้น u กับ 20 ต้องมีตัวหารร่วมมากเท่ากับ 1 ค่าที่เป็นไปได้คือ $u = 1, 3, 7, 9$

ใช้ผลต่างกำลังสอง $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 120(b - a)$ คำนวณได้ดังตาราง

u	$v = 20 - u$	a	b	$b^2 - a^2$
1	19	6	114	12 960
3	17	18	102	10 080
7	13	42	78	4 320
9	11	54	66	1 440

ผลรวมที่ต้องการจึงเท่ากับ

$$12\,960 + 10\,080 + 4\,320 + 1\,440 = 28\,800$$

ตอบ 28 800

วิธีทำข้อ 7

มัธยฐานและแผนภาพกล่อง

นักเรียนหญิง มีข้อมูล 23 ค่า จากแผนภาพกล่องได้ $Q_1 = 8$ และ $Q_3 = 30$ ชั่วโมง ควอไทล์ทั้งสองอยู่ที่ตำแหน่ง

$$\frac{23 + 1}{4} = 6 \quad \text{และ} \quad \frac{3(23 + 1)}{4} = 18$$

ข้อมูลไม่ซ้ำกัน จึงมีข้อมูลในช่วงตั้งแต่ 8 ถึง 30 ชั่วโมงเป็นข้อมูลลำดับที่ 6 ถึง 18 รวม

$$18 - 6 + 1 = 13 \text{ คน}$$

นักเรียนชาย มีข้อมูล 40 ค่า ให้ $z_1 < z_2 < \dots < z_{40}$ เป็นเวลาที่เรียงจากน้อยไปมาก มัธยฐานเท่ากับค่าเฉลี่ยของข้อมูลลำดับที่ 20 และ 21 จึงมี

$$\frac{z_{20} + z_{21}}{2} = 8$$

เมื่อข้อมูลไม่ซ้ำกัน ต้องมี $z_{20} < 8 < z_{21}$ ดังนั้นข้อมูลที่ไม่น้อยกว่า 8 คือข้อมูลลำดับที่ 21 ถึง 40 รวม 20 ค่า และทุกค่าไม่เกิน 30 ซึ่งเป็นค่าสูงสุด

ในช่วงที่กำหนดจึงมีนักเรียนชายมากกว่านักเรียนหญิง

$$20 - 13 = 7 \text{ คน}$$

ตอบ 7 คน

วิธีทำข้อ 8

พื้นที่ผิวและปริมาตรกล่อง

ให้ด้านทั้งสามของกล่องยาว $x - 1, x, x + 1$ เซนติเมตร โดย x เป็นจำนวนเต็มและ $x > 1$

ค่าตัวเลขของพื้นที่ผิวรวมเป็นตารางเซนติเมตรเท่ากับ

$$\begin{aligned} 2[(x-1)x + x(x+1) + (x-1)(x+1)] &= 2(3x^2 - 1) \\ &= 6x^2 - 2 \end{aligned}$$

ส่วนค่าตัวเลขของปริมาตรเป็นลูกบาศก์เซนติเมตรเท่ากับ $(x-1)x(x+1) = x^3 - x$ ปริมาตรมีค่าตัวเลขมากกว่าพื้นที่ผิวรวมอยู่ 122 จึงได้

$$(x^3 - x) - (6x^2 - 2) = 122$$

$$x^3 - 6x^2 - x - 120 = 0$$

$$(x-8)(x^2 + 2x + 15) = 0$$

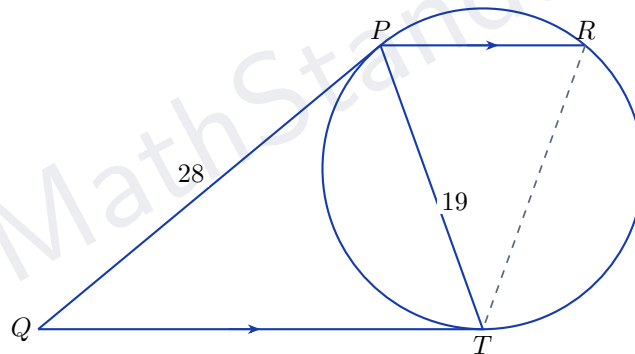
เนื่องจาก $x^2 + 2x + 15 = (x+1)^2 + 14 > 0$ สำหรับจำนวนจริงทุกค่า จึงมี $x = 8$ เท่านั้น ด้านทั้งสามยาว 7, 8, 9 เซนติเมตร ด้านที่ยาวที่สุดจึงยาว 9 เซนติเมตร

ตอบ 9 เซนติเมตร

วิธีทำข้อ 9

เส้นสัมผัสและคอร์ดของวงกลม

เส้นสัมผัสจากจุดภายนอกจุดเดียวกันยาวเท่ากัน จึงมี $QP = QT = 28$ หน่วย ลากคอร์ด RT เพิ่มเติม



จาก $PR \parallel QT$ และเส้นตัด PT ได้มุมแย้งเท่ากัน คือ

$$\angle RPT = \angle PTQ$$

จากทฤษฎีบทมุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด มุมระหว่างเส้นสัมผัส PQ กับคอร์ด PT เท่ากับมุมที่รองรับคอร์ด PT ในส่วนของวงกลมตรงข้าม จึงได้

$$\angle TPQ = \angle PRT$$

ดังนั้น $\triangle PRT \sim \triangle TPQ$ มีอัตราส่วนด้านคู่ที่สมนัยกัน

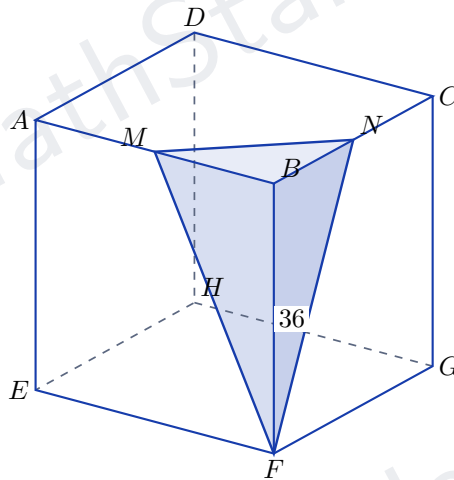
$$\frac{PR}{TP} = \frac{PT}{TQ} \implies PR = \frac{PT^2}{TQ} = \frac{19^2}{28} = \frac{361}{28} \text{ หน่วย}$$

ตอบ $\frac{361}{28}$ หน่วย

วิธีทำข้อ 10

ปริมาตรลูกบาศก์หลังตัด

ส่วนที่ตัดออกเป็นพีระมิดฐานสามเหลี่ยม BMN และมียอดที่ F เนื่องจาก M, N เป็นจุดกึ่งกลางของเส้น AB, BC ตามลำดับ จึงมี $BM = BN = 18$ เซนติเมตร



หน้าบนของลูกบาศก์เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จึงมี $BM \perp BN$ พื้นที่ฐานสามเหลี่ยม BMN เท่ากับ

$$\frac{1}{2} \times 18 \times 18 = 162 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

เส้น BF ตั้งฉากกับระนาบหน้าบนและยาว 36 เซนติเมตร จึงเป็นความสูงของพีระมิด ปริมาตรส่วนที่ตัดออกเท่ากับ

$$\frac{1}{3} \times 162 \times 36 = 1944 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ปริมาตรลูกบาศก์เดิมเท่ากับ $36^3 = 46\,656$ ลูกบาศก์เซนติเมตร ส่วนที่เหลือจึงมีปริมาตร

$$46\,656 - 1\,944 = 44\,712 \text{ ลูกบาศก์เซนติเมตร}$$

ตอบ 44 712 ลูกบาศก์เซนติเมตร