



MathStandard

ตัวอย่างข้อสอบเก่า

เรียบเรียงใหม่

เตรียมความพร้อมเข้า ม.4

วิชาคณิตศาสตร์

โครงการห้องเรียนวิทยาศาสตร์ วมว. รอบ 2

ชุดอ้างอิง 02

เอกสารแจกฟรีเพื่อการศึกษา

คำชี้แจง

ชุดอ้างอิง 02 | ฉบับ 1.3

เอกสารแจกฟรีเพื่อการศึกษา

เอกสารตัวอย่างข้อสอบเก่า วิชาคณิตศาสตร์ สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 โครงการห้องเรียนวิทยาศาสตร์ วมว. รอบ 2

จัดทำโดย MathStandard

ข้อสอบในชุดนี้ครอบคลุมพาราโบลา ทฤษฎีบทวงกลม สถิติ เลขยกกำลัง ปริมาตร ความน่าจะเป็น อสมการ และเรขาคณิต

ข้อสอบมีจำนวน 10 ข้อ แบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่	ข้อ	รูปแบบการตอบ
1	1-5	เติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ
2	6-10	แสดงวิธีทำ จำนวน 5 ข้อ

- ตอนที่ 1 ข้อ 1-5 เขียนเฉพาะคำตอบในช่องที่กำหนด
- ตอนที่ 2 ข้อ 6-10 แสดงวิธีทำและเหตุผลทางคณิตศาสตร์ตามลำดับ และระบุคำตอบในช่องท้ายข้อ
- คำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็มให้เขียนเป็นเศษส่วนหรือกรณฑ์ในรูปอย่างง่าย และคงค่า π ไว้ เว้นแต่โจทย์กำหนดเป็นอย่างอื่น พร้อมระบุหน่วยเมื่อจำเป็น
- รูปประกอบอาจไม่เป็นไปตามมาตราส่วน การคำนวณให้ใช้ข้อมูลและเงื่อนไขที่ระบุในโจทย์
- เฉลยคำตอบและวิธีทำอยู่ท้ายเล่ม เรียงตามลำดับข้อ

เอกสารนี้จัดทำโดย MathStandard เพื่อประกอบการเตรียมสอบ ชื่อโรงเรียน และโครงการที่ปรากฏใช้เพื่อระบุการสอบเป้าหมายเท่านั้น เอกสารนี้ไม่ใช่ข้อสอบทางการ และไม่ได้จัดทำร่วมกับหรือได้รับการรับรองจากหน่วยงานเจ้าของ การสอบ

สารบัญ

รายการ	หน้า
คำชี้แจง	1
ข้อสอบ	3–12
ตอนที่ 1 เติมคำตอบ ข้อ 1–5	3–7
ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ ข้อ 6–10	8–12
เฉลยคำตอบ	13
วิธีทำ	14–23

วิธีทำรายข้อ

ข้อ 1 จุดบนพาราโบลาและรากที่สอง	14
ข้อ 2 มุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด	15
ข้อ 3 คอเวอไทล์และฐานนิยมของข้อมูล	16
ข้อ 4 จำนวนหลักของผลคูณเลขยกกำลัง	17
ข้อ 5 ความหนาของท่อทรงกระบอกกลวง	18
ข้อ 6 ความน่าจะเป็นของจำนวนเต็ม	19
ข้อ 7 ผลบวกคำตอบจำนวนเต็มของอสมการ	20
ข้อ 8 เส้นทแยงมุมตั้งฉากและค่าต่ำสุด	21
ข้อ 9 ความยาวในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า	22
ข้อ 10 จำนวนสามหลักและการสลับเลขโดด	23

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 1 กำหนดให้ $a \geq 0$ และจุด $P(2\sqrt{a}, 7 + 6\sqrt{a})$ อยู่บนกราฟพาราโบลา

$$y = 3x^2 - 81x + 487$$

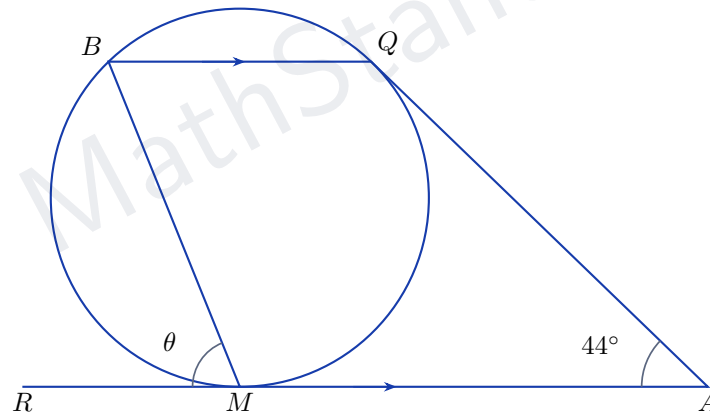
จงหาค่ามากที่สุดของ a

ตอบ _____

พื้นที่ทด

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 2 จากจุด A ภายนอกวงกลม ลากเส้นสัมผัส AM และ AQ ซึ่งสัมผัสวงกลมที่จุด M และ Q ตามลำดับ จุด B อยู่บนวงกลมและ $BQ \parallel AM$ จุด R, M, A อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน โดย M อยู่ระหว่าง R กับ A ถ้า $\angle MAQ = 44^\circ$ จงหาขนาดของมุม $\theta = \angle RMB$



ตอบ _____

พื้นที่ทด

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 3 ข้อมูลจำนวน 10 ค่า เรียงจากน้อยไปมากได้ดังนี้

$$17, \quad 19, \quad 20, \quad 21, \quad x, \quad \frac{x+y}{4}, \quad 32, \quad 37, \quad 78, \quad y$$

ถ้าข้อมูลชุดนี้มีพิสัยเท่ากับ 64 และมีฐานเท่ากับฐานนิยม โดยมีฐานนิยมเพียงค่าเดียว จงหาควอไทล์ที่สองของข้อมูลชุดนี้

ตอบ _____

พื้นที่ทด

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 4 จงหาจำนวนหลักของจำนวนเต็มบวก

$$2^{20} \times 96^{27} \times \left(\frac{625}{12}\right)^{26}$$

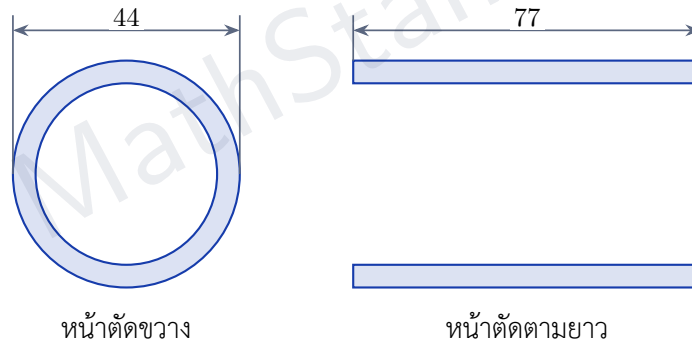
เมื่อเขียนในระบบเลขฐานสิบ

ตอบ _____

พื้นที่ทดสอบ

ตอนที่ 1 เต็มคำตอบ

ข้อ 5 นำวัสดุที่มีปริมาตร 38 720 ลูกบาศก์เซนติเมตร มาขึ้นรูปเป็นท่อทรงกระบอกกลวงที่เปิดทั้งสองปลาย ยาว 77 เซนติเมตร และมีเส้นผ่านศูนย์กลางภายนอก 44 เซนติเมตร ถ้าผนังท่อมีความหนาสม่ำเสมอและไม่มีการสูญเสียวัสดุ จงหาความหนาของผนังท่อ กำหนดให้ $\pi = \frac{22}{7}$



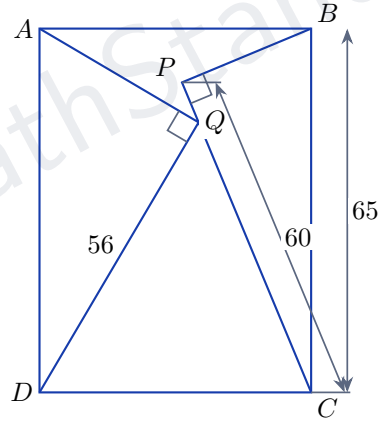
ตอบ _____

พื้นที่ที่

วิธีทำ

ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ

ข้อ 9 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $ABCD$ มี $BC = 65$ หน่วย จุด P, Q อยู่ภายในรูป โดย P, Q, C อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและ Q อยู่ระหว่าง P กับ C ถ้า $BP \perp PC, AQ \perp DQ, PC = 60$ หน่วย และ $DQ = 56$ หน่วย จงหาค่าของ $2AB$



วิธีทำ

ตอบ _____

ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ

ข้อ 10 จำนวนเต็มบวกสามหลัก $\overline{abc}$ มีเลขโดดหลักร้อยและหลักหน่วยไม่เป็นศูนย์ เมื่อสลับเลขโดดหลักร้อยกับหลักหน่วยจะได้ $\overline{cba}$ ถ้า

$$37 \times \overline{abc} = 19 \times \overline{cba}$$

จงหาจำนวน $\overline{abc}$

วิธีทำ

ตอบ _____

เฉลยคำตอบ

ชุดอ้างอิง 02 | ฉบับ 1.3

ข้อ คำตอบ	
1	100
2	68°
3	27
4	105 หลัก
5	4 เซนติเมตร
6	$\frac{14}{39}$
7	462
8	$\frac{\sqrt{58}}{2}$ หน่วย
9	$\frac{1456}{15}$ หน่วย
10	418

เอกสารนี้จัดทำโดย MathStandard เพื่อประกอบการเตรียมสอบ ชื่อโรงเรียน และโครงการที่ปรากฏใช้เพื่อระบุการสอบเป้าหมายเท่านั้น เอกสารนี้ไม่ใช่ข้อสอบทางการ และไม่ได้จัดทำร่วมกับหรือได้รับการรับรองจากหน่วยงานเจ้าของการสอบ

วิธีทำข้อ 1

จุดบนพาราโบลาและรากที่สอง

ให้ $t = \sqrt{a}$ จึงมี $t \geq 0$ และพิกัดของจุด P คือ $(2t, 7 + 6t)$ แทนพิกัดลงในสมการพาราโบลา ได้

$$7 + 6t = 3(2t)^2 - 81(2t) + 487$$

$$12t^2 - 168t + 480 = 0$$

$$t^2 - 14t + 40 = 0$$

$$(t - 4)(t - 10) = 0$$

ดังนั้น $t = 4$ หรือ $t = 10$ ซึ่งเป็นค่าที่ไม่เป็นลบทั้งคู่ เนื่องจาก $a = t^2$ จึงได้ $a = 16$ หรือ $a = 100$ ค่ามากที่สุดของ a คือ 100

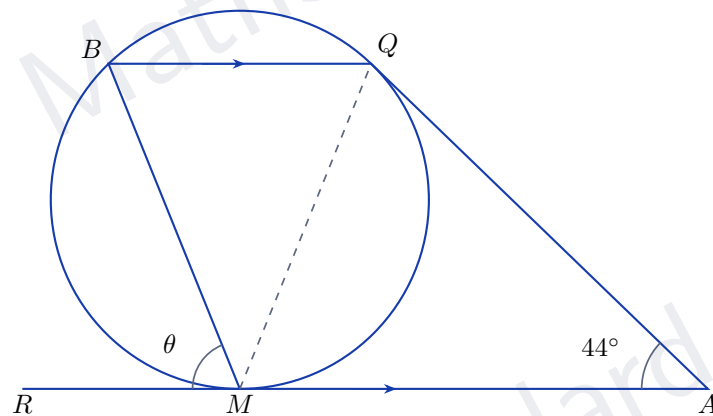
ตอบ 100

วิธีทำข้อ 2

มุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด

เส้นสัมผัสจากจุดภายนอกจุดเดียวกันยาวเท่ากัน จึงมี $AM = AQ$ รูปสามเหลี่ยม AMQ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ลากคอร์ด MQ จะได้

$$\angle AMQ = \angle MQA = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ$$



จากทฤษฎีบทมุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ด มุมระหว่างเส้นสัมผัส MA กับคอร์ด MQ เท่ากับมุมในส่วนโค้งวงกลมตรงข้ามที่รองรับคอร์ดเดียวกัน จึงมี

$$\angle MBQ = \angle AMQ = 68^\circ$$

เนื่องจาก $BQ \parallel MR$ มุมแย้งที่เกิดจากเส้นตัด BM เท่ากัน ดังนั้น

$$\theta = \angle RMB = \angle MBQ = 68^\circ$$

ตอบ 68°

วิธีทำข้อ 3

ควอไทล์และฐานนิยมของข้อมูล

พิสัยเท่ากับค่าสูงสุดลบค่าต่ำสุด จึงได้

$$y - 17 = 64 \implies y = 81$$

ให้ $z = \frac{x + 81}{4}$ เป็นข้อมูลลำดับที่ 6 ส่วน x เป็นข้อมูลลำดับที่ 5 มัธยฐานจึงเท่ากับ $\frac{x + z}{2}$

ถ้า $x < z$ มัธยฐานจะอยู่ระหว่างข้อมูลลำดับที่ 5 กับลำดับที่ 6 อย่างเคร่งครัด และไม่ตรงกับข้อมูลค่าใด จึงไม่อาจเป็นฐานนิยมได้ ดังนั้นต้องมี $x = z$

$$x = \frac{x + 81}{4}$$

$$4x = x + 81$$

$$x = 27$$

ข้อมูลจึงเป็น 17, 19, 20, 21, 27, 27, 32, 37, 78, 81 มีฐานนิยมเพียงค่าเดียวคือ 27 และมีมัธยฐานเท่ากับ 27
ควอไทล์ที่สองเท่ากับมัธยฐาน จึงได้ $Q_2 = 27$

ตอบ 27

วิธีทำข้อ 4

จำนวนหลักของผลคูณเลขยกกำลัง

แยกตัวประกอบของฐานให้เป็นจำนวนเฉพาะ โดย

$$96 = 3 \times 2^5 \quad \text{และ} \quad \frac{625}{12} = \frac{5^4}{3 \times 2^2}$$

ใช้สมบัติของเลขยกกำลังรวมตัวประกอบที่มีฐานเดียวกัน ได้

$$\begin{aligned} 2^{20} \times 96^{27} \times \left(\frac{625}{12}\right)^{26} &= 2^{20} \times 3^{27} \times 2^{135} \times \frac{5^{104}}{3^{26} \times 2^{52}} \\ &= 3 \times 2^{103} \times 5^{104} \\ &= 15 \times 10^{103} \end{aligned}$$

จำนวนนี้เขียนเป็นเลข 15 ตามด้วยศูนย์ 103 ตัว จึงมีจำนวนหลักทั้งหมด $2 + 103 = 105$ หลัก

ตอบ 105 หลัก

วิธีทำข้อ 5

ความหนาของท่อทรงกระบอกกลวง

ให้ R และ r แทนรัศมีภายนอกและรัศมีภายในของท่อ ตามลำดับ โดยวัดเป็นเซนติเมตร จะได้ $R = 22$ และ $r > 0$ ปริมาตรผนังท่อเท่ากับผลต่างของปริมาตรทรงกระบอกภายนอกกับช่องว่างภายใน

$$\pi(R^2 - r^2) \times 77 = 38\,720$$

$$\frac{22}{7}(22^2 - r^2) \times 77 = 38\,720$$

$$484 - r^2 = 160$$

$$r^2 = 324$$

ดังนั้น $r = 18$ เซนติเมตร ความหนาของผนังท่อเท่ากับผลต่างของรัศมีทั้งสอง คือ

$$R - r = 22 - 18 = 4 \text{ เซนติเมตร}$$

ตอบ 4 เซนติเมตร

วิธีทำข้อ 6

ความน่าจะเป็นของจำนวนเต็ม

เงื่อนไขระยะห่างจาก -2 ไม่เกิน 78 หน่วย ให้จำนวนเต็มตั้งแต่ -80 ถึง 76 รวม 157 จำนวน เมื่อตัด -2 ออก จึงมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 156 จำนวน

จำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว คือ $-80, -76, \dots, 76$ มี

$$\frac{76 - (-80)}{4} + 1 = 40 \text{ จำนวน}$$

จำนวนที่ $n - 5$ หารด้วย 7 ลงตัว คือ $-79, -72, \dots, 75$ มี 23 จำนวน แต่ต้องตัด -2 ออก จึงเหลือ 22 จำนวน

จำนวนที่เป็นไปตามทั้งสองเงื่อนไข ต้องเป็นพหุคูณของ 4 และเหลือเศษ 5 เมื่อหารด้วย 7 จึงอยู่ในรูป $28k + 12$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม ในช่วงที่กำหนดมี

$$-72, -44, -16, 12, 40, 68$$

รวม 6 จำนวน ซึ่งถูกนับซ้ำ จึงมีจำนวนผลลัพธ์ที่ต้องการ

$$40 + 22 - 6 = 56 \text{ จำนวน}$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นเท่ากับ $\frac{56}{156} = \frac{14}{39}$

ตอบ $\frac{14}{39}$

วิธีทำข้อ 7

ผลบวกคำตอบจำนวนเต็มของสมการ

จาก $a + b = 95$ ได้ $b = 95 - a$ แทนลงในอสมการ แล้วคูณทั้งสองข้างด้วย 15 ซึ่งเป็นจำนวนบวก ได้

$$\frac{95 - a}{3} + 2a > \frac{2}{5}(a + 194)$$

$$5(95 - a) + 30a > 6(a + 194)$$

$$475 + 25a > 6a + 1164$$

$$19a > 689$$

เนื่องจาก $19 \times 36 = 684$ และ $19 \times 37 = 703$ จึงมี $a \geq 37$

นอกจากนี้ $a < b = 95 - a$ ให้ $2a < 95$ ดังนั้น $a \leq 47$ ค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดจึงเป็น $37, 38, \dots, 47$ รวม 11 จำนวน มีผลบวกเท่ากับ

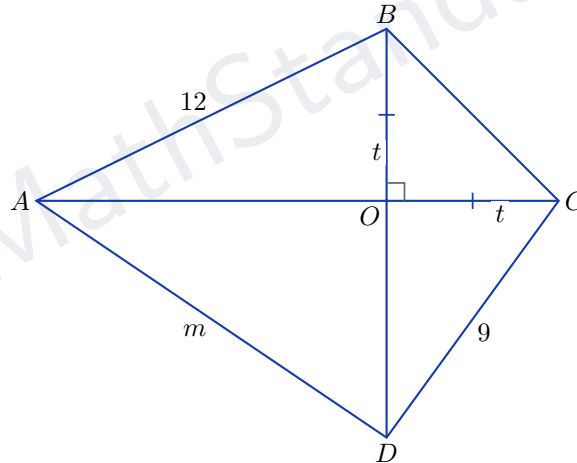
$$\frac{(37 + 47) \times 11}{2} = 462$$

ตอบ 462

วิธีทำข้อ 8

เส้นทแยงมุมตั้งฉากและค่าต่ำสุด

ให้ $t = BO = CO > 0$ และ $m = AD$ โดย m เป็นจำนวนเต็มบวก ความยาวทั้งหมดวัดเป็นหน่วย



จากทฤษฎีบทพีทาโกรัสในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก AOB และ COD ได้ $AO^2 = 144 - t^2$ และ $DO^2 = 81 - t^2$ นำไปใช้ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก AOD ได้

$$m^2 = AO^2 + DO^2 = 225 - 2t^2$$

$$t^2 = \frac{225 - m^2}{2}$$

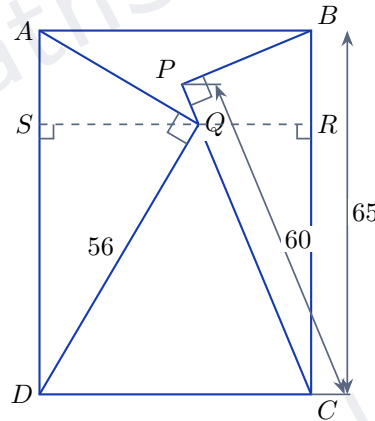
เมื่อ m มากขึ้น t^2 จะลดลง จาก $t > 0$ ต้องมี $m < 15$ จึงได้ค่าจำนวนเต็มมากที่สุดเป็น $m = 14$ ให้ $t^2 = \frac{29}{2}$ คำนี้น้อยกว่า 81 ทำให้ AO และ DO เป็นบวกและสร้างรูปตามเงื่อนไขได้ ดังนั้น $t = \frac{\sqrt{58}}{2}$

ตอบ $\frac{\sqrt{58}}{2}$ หน่วย

วิธีทำข้อ 9

ความยาวในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BPC ได้ $BP = \sqrt{65^2 - 60^2} = 25$ หน่วย และจาก $AD = BC = 65$ กับ $\angle DQA = 90^\circ$ ได้ $AQ = \sqrt{65^2 - 56^2} = 33$ หน่วย
 ลาก $QS \perp AD$ ที่จุด S และต่อถึงด้าน BC ที่จุด R ดังรูป



เปรียบเทียบพื้นที่สามเหลี่ยม DQA โดยใช้ฐาน AD กับด้านประกอบมุมฉาก ได้ $65 QS = 33 \times 56$ ดังนั้น $QS = \frac{1848}{65}$ หน่วย

จาก $\triangle DQS \sim \triangle DAQ$ ได้ $\frac{DS}{DQ} = \frac{DQ}{DA}$ จึงมี $DS = \frac{56^2}{65} = \frac{3136}{65}$ หน่วย และ $RC = DS$

เนื่องจาก $\triangle QRC \sim \triangle BPC$ จึงได้

$$\frac{QR}{RC} = \frac{BP}{PC} = \frac{25}{60} \implies QR = \frac{784}{39}$$

ดังนั้น $AB = SR = SQ + QR = \frac{1848}{65} + \frac{784}{39} = \frac{728}{15}$ หน่วย จึงมี $2AB = \frac{1456}{15}$ หน่วย

ตอบ $\frac{1456}{15}$ หน่วย

วิธีทำข้อ 10

จำนวนสามหลักและการสลับเลขโดด

ให้ a, b, c เป็นเลขโดด โดย $1 \leq a, c \leq 9$ และ $0 \leq b \leq 9$ เขียนจำนวนสามหลักตามค่าประจำหลัก แล้วจัดรูปสมการ ได้

$$37(100a + 10b + c) = 19(100c + 10b + a)$$

$$3681a + 180b = 1863c$$

$$409a + 20b = 207c$$

เนื่องจาก $409 = 2(207) - 5$ จึงเขียนได้เป็น

$$207(c - 2a) = 20b - 5a$$

ขอบเขตของเลขโดดให้ $-45 \leq 20b - 5a \leq 175$ จำนวนที่เป็นพหุคูณของ 207 ในช่วงนี้มีเพียง 0 จึงได้

$$c = 2a \quad \text{และ} \quad a = 4b$$

ดังนั้น $c = 8b$ เมื่อ $1 \leq c \leq 9$ ต้องมี $b = 1$ จึงได้ $a = 4$ และ $c = 8$ จำนวนที่ต้องการคือ 418 ตรวจสอบได้ว่า

$$37 \times 418 = 19 \times 814 = 15\,466$$

ตอบ 418