



MathStandard

ตัวอย่างข้อสอบเก่า

เรียบเรียงใหม่

เตรียมความพร้อมเข้า ม.4

วิชาคณิตศาสตร์

โครงการห้องเรียนวิทยาศาสตร์ วมว. รอบ 2

ชุดอ้างอิง 01

เอกสารแจกฟรีเพื่อการศึกษา

คำชี้แจง

ชุดอ้างอิง 01 | ฉบับ 1.3

เอกสารแจกฟรีเพื่อการศึกษา

เอกสารตัวอย่างข้อสอบเก่า วิชาคณิตศาสตร์ สำหรับเตรียมสอบเข้า ม.4 โครงการห้องเรียนวิทยาศาสตร์
วมว. รอบ 2

จัดทำโดย MathStandard

ข้อสอบในชุดนี้ครอบคลุมการวิเคราะห์พื้นที่ พาราโบลา กรณท์ พหุนาม ค่าเฉลี่ย มัธยฐาน ฐานนิยม และ
ปริมาตร

ข้อสอบมีจำนวน 10 ข้อ แบ่งเป็น 2 ตอน ดังนี้

ตอนที่	ข้อ	รูปแบบการตอบ
1	1-5	เติมคำตอบ จำนวน 5 ข้อ
2	6-10	แสดงวิธีทำ จำนวน 5 ข้อ

- ตอนที่ 1 ข้อ 1-5 เขียนเฉพาะคำตอบในช่องที่กำหนด
- ตอนที่ 2 ข้อ 6-10 แสดงวิธีทำและเหตุผลทางคณิตศาสตร์ตามลำดับ และระบุคำตอบในช่องท้ายข้อ
- คำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็มให้เขียนเป็นเศษส่วนหรือกรณท์ในรูปอย่างง่าย และคงค่า π ไว้ เว้นแต่โจทย์
กำหนดเป็นอย่างอื่น พร้อมระบุหน่วยเมื่อจำเป็น
- รูปประกอบอาจไม่เป็นไปตามมาตราส่วน การคำนวณให้ใช้ข้อมูลและเงื่อนไขที่ระบุในโจทย์
- เฉลยคำตอบและวิธีทำอยู่ท้ายเล่ม เรียงตามลำดับข้อ

เอกสารนี้จัดทำโดย MathStandard เพื่อประกอบการเตรียมสอบ ชื่อโรงเรียน และโครงการที่ปรากฏใช้เพื่อระบุการ
สอบเป้าหมายเท่านั้น เอกสารนี้ไม่ใช่ข้อสอบทางการ และไม่ได้จัดทำร่วมกับหรือได้รับการรับรองจากหน่วยงานเจ้าของ
การสอบ

สารบัญ

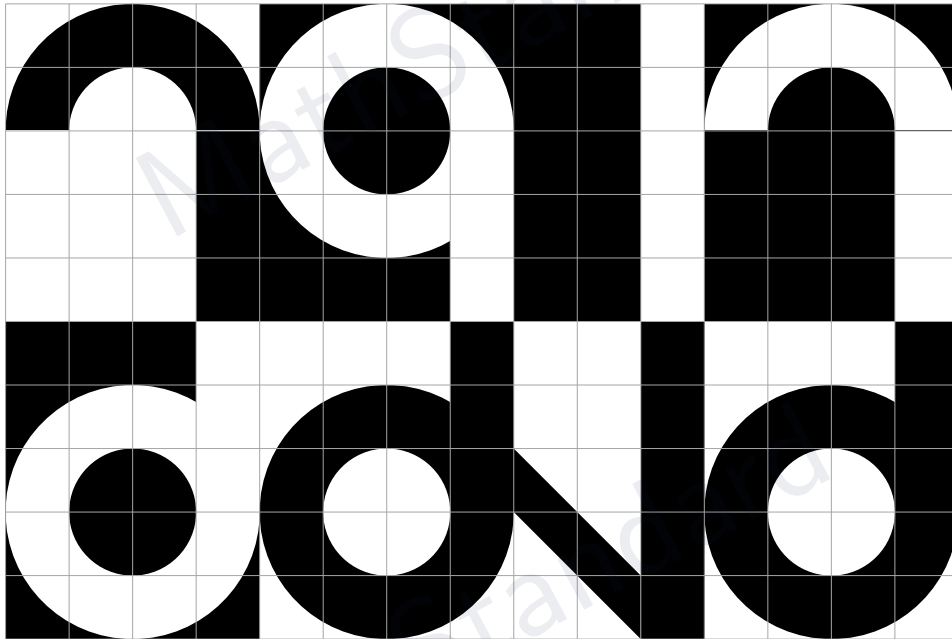
รายการ	หน้า
คำชี้แจง	1
ข้อสอบ	3–12
ตอนที่ 1 เติมคำตอบ ข้อ 1–5	3–7
ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ ข้อ 6–10	8–12
เฉลยคำตอบ	13
วิธีทำ	14–23

วิธีทำรายข้อ

ข้อ 1 พื้นที่แรเงาบนตาราง	14
ข้อ 2 จุดยอดของพาราโบลา	15
ข้อ 3 รากที่สามและค่าสัมบูรณ์	16
ข้อ 4 พื้นที่ผิวข้างของกรวย	17
ข้อ 5 ค่าเฉลี่ยและผลรวมคะแนน	18
ข้อ 6 วงกลมสัมผัสภายนอก	19
ข้อ 7 ผลคูณของพจน์กำลังสาม	20
ข้อ 8 ผลรวมสมมาตร	21
ข้อ 9 มัธยฐานและฐานนิยม	22
ข้อ 10 ระดับน้ำเมื่อพลิกภาชนะ	23

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 1 เส้นตารางแนวตั้งและแนวนอนที่อยู่ติดกันห่างกันแนวละ 8 หน่วย ส่วนโค้งในรูปเป็นส่วนของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนจุดตัดของเส้นตาราง และมีรัศมีเป็นจำนวนเต็มเท่าของระยะห่างเส้นตาราง จงหาพื้นที่สีดำทั้งหมดเป็นตารางหน่วย



ตอบ _____

พื้นที่ทศ

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 2 กำหนดให้ $A(x_1, y_1)$ เป็นจุดต่ำสุดของกราฟ

$$y = 2x^2 + 24x + 76$$

และ $B(x_2, y_2)$ เป็นจุดสูงสุดของกราฟ

$$y = -2x^2 + 20x - 58$$

ถ้า C มีพิกัดเป็น (x_1, y_2) จงหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นตารางหน่วย

ตอบ _____

พื้นที่ที่หาค

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 3 ให้ x, y เป็นจำนวนจริงที่ $x < y$ และสอดคล้องกับสมการ

$$\sqrt[3]{(x+y)^3} = 19 \quad \text{และ} \quad \sqrt{(x-y)^2} = 27$$

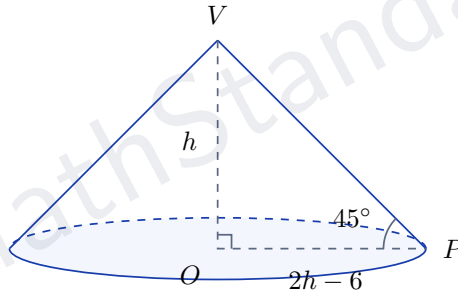
จงหาคู่อันดับ (x, y)

ตอบ _____

พื้นที่ทด

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 4 กรวยกลมตรงสูง h หน่วย มีรัศมีฐานยาว $2h - 6$ หน่วย ส่วนสูงเอียงทำมุม 45° กับระนาบฐาน จงหาพื้นที่ผิวข้างของกรวยเป็นตารางหน่วย



ตอบ _____

พื้นที่ที่ตัด

ตอนที่ 1 เติมคำตอบ

ข้อ 5 ผลการตรวจข้อสอบของนักเรียนบางส่วนในห้องมีคะแนนเฉลี่ย 80 คะแนน และยังเหลือข้อสอบของนักเรียนอีก 6 คน เมื่อตรวจครบทุกคน คะแนนเฉลี่ยลดลง 1 คะแนนจากเดิม และผลรวมคะแนนเพิ่มขึ้น 444 คะแนน จงหาจำนวนนักเรียนทั้งหมดในห้อง

ตอบ _____

พื้นที่ทด

ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ

ข้อ 9 ข้อมูล 8 จำนวน ได้แก่

 $7, a, 5, 9, b, 7, c, 10$

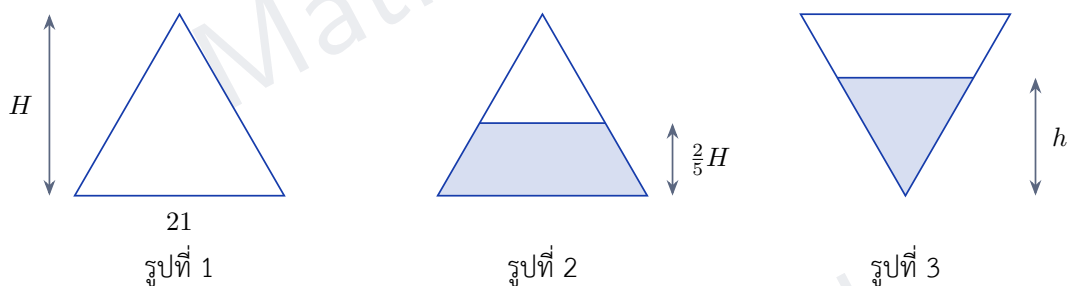
มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\frac{33}{4}$ มัธยฐาน 8 และมีฐานนิยมเพียงค่าเดียวคือ 7 ถ้า a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ที่แตกต่างกัน จงหาค่าของผลคูณ abc

วิธีทำ

ตอบ _____

ตอนที่ 2 แสดงวิธีทำ

ข้อ 10 ภาชนะรูปปริซึมตรงมีหน้าตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าด้านละ 21 เซนติเมตร และมีความยาวตามแนวปริซึม 8 เซนติเมตร กำหนดให้ความสูงของหน้าตัดสามเหลี่ยมเป็น H วางภาชนะโดยให้ฐานของหน้าตัดอยู่ด้านล่างดังรูปที่ 1 แล้วเติมน้ำจนมีความลึก $\frac{2}{5}H$ ดังรูปที่ 2 จากนั้นปิดภาชนะและพลิกให้จุดยอดของหน้าตัดอยู่ด้านล่างดังรูปที่ 3 โดยไม่มีน้ำรั่วออก ถ้าความลึกของน้ำหลังพลิกเป็น h จงหาค่าของ $\frac{h}{H}$



วิธีทำ

ตอบ _____

เฉลยคำตอบ

ชุดอ้างอิง 01 | ฉบับ 1.3

ข้อ คำตอบ

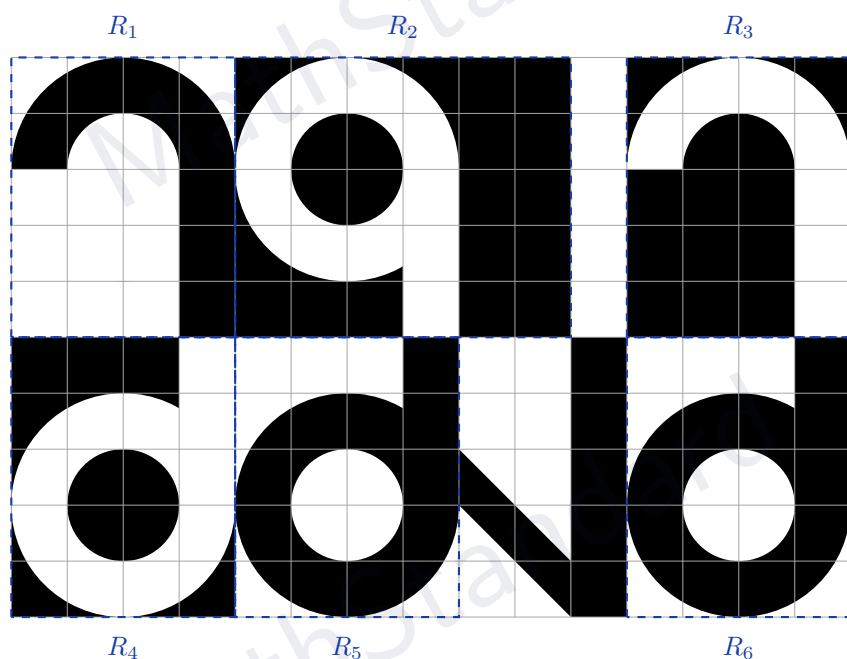
- 1 4928 ตารางหน่วย
 - 2 66 ตารางหน่วย
 - 3 $(-4, 23)$
 - 4 $36\sqrt{2}\pi$ ตารางหน่วย
 - 5 36 คน
 - 6 $60 - \frac{9\pi}{4}$ ตารางหน่วย
 - 7 27846
 - 8 $-\frac{137}{6}$
 - 9 336
 - 10 $\frac{4}{5}$
-

เอกสารนี้จัดทำโดย MathStandard เพื่อประกอบการเตรียมสอบ ชื่อโรงเรียน และโครงการที่ปรากฏใช้เพื่อระบุการสอบเป้าหมายเท่านั้น เอกสารนี้ไม่ใช่ข้อสอบทางการ และไม่ได้จัดทำร่วมกับหรือได้รับการรับรองจากหน่วยงานเจ้าของการสอบ

วิธีทำข้อ 1

พื้นที่แรเงาบนตาราง

ให้หนึ่งหน่วยตารางหมายถึงพื้นที่ของช่องตารางเล็กหนึ่งช่อง ซึ่งมีพื้นที่ $8^2 = 64$ ตารางหน่วย
แบ่งบริเวณของรูปด้วยกรอบเส้นประดังนี้



พิจารณาพื้นที่สีดำในกรอบแต่ละคู่ เมื่อเลื่อนหรือสะท้อนส่วนโค้งที่มีรัศมีเท่ากันมาประกบกัน ส่วนที่เพิ่มขึ้นและส่วนที่ขาดหายจะชดเชยกัน จึงได้พื้นที่ดังตาราง

กรอบที่จับคู่	รูปที่ประกอบได้	พื้นที่ (หน่วยตาราง)
R_1 กับ R_3	สี่เหลี่ยมผืนผ้า 4×5	20
R_2 กับ R_5	สี่เหลี่ยมผืนผ้า 6×5	30
R_4 กับ R_6	สี่เหลี่ยมผืนผ้า 4×5	20

บริเวณที่เหลือประกอบด้วยแถบตั้งกว้าง 1 ช่อง สูง 5 ช่อง มีพื้นที่ 5 หน่วยตาราง และแถบเอียงซึ่งประกอบกลับเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด 2×1 ช่อง มีพื้นที่ 2 หน่วยตาราง
ดังนั้น พื้นที่สีดำทั้งหมดเท่ากับ

$$(20 + 30 + 20 + 5 + 2) \times 64 = 77 \times 64 = 4928$$

ตอบ 4928 ตารางหน่วย

[กลับไปโจทย์ข้อ 1](#)

[ตารางเฉลยคำตอบ](#)

[สารบัญ](#)

วิธีทำข้อ 2

จุดยอดของพาราโบลา

เขียนสมการกราฟแรกโดยทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 + 12x) + 76 \\ &= 2[(x + 6)^2 - 36] + 76 \\ &= 2(x + 6)^2 + 4 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $(x + 6)^2 \geq 0$ กราฟจึงมีจุดต่ำสุดที่ $A = (-6, 4)$

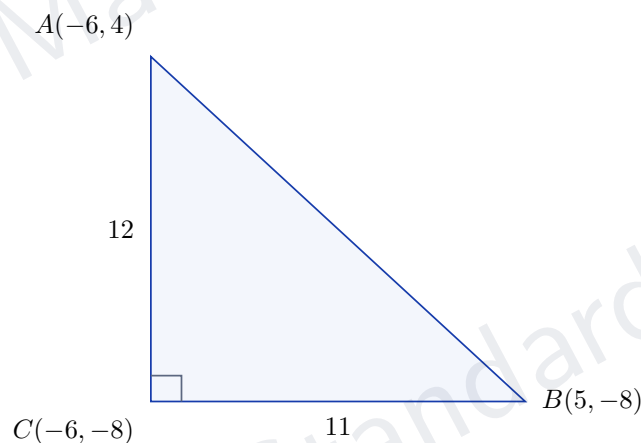
สำหรับกราฟที่สอง

$$\begin{aligned} y &= -2(x^2 - 10x) - 58 \\ &= -2[(x - 5)^2 - 25] - 58 \\ &= -2(x - 5)^2 - 8 \end{aligned}$$

จึงมีจุดสูงสุดที่ $B = (5, -8)$ และได้ $C = (-6, -8)$

เส้น AC ขนานกับแกน y และเส้น BC ขนานกับแกน x จึงตั้งฉากกัน โดย

$$AC = 4 - (-8) = 12, \quad BC = 5 - (-6) = 11$$



พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}(11)(12) = 66$ ตารางหน่วย

ตอบ 66 ตารางหน่วย

วิธีทำข้อ 3

รากที่สามและค่าสัมบูรณ์

สำหรับจำนวนจริง t มี $\sqrt[3]{t^3} = t$ ดังนั้น สมการแรกให้

$$x + y = 19$$

รากที่สองหลักมีค่าไม่เป็นลบ จึงมี

$$\sqrt{(x - y)^2} = |x - y| = 27$$

จากเงื่อนไข $x < y$ ได้ $x - y < 0$ และ $|x - y| = y - x$ ดังนั้น

$$y - x = 27$$

นำสมการทั้งสองมาบวกกัน

$$(x + y) + (y - x) = 19 + 27$$

$$2y = 46$$

$$y = 23$$

แทนค่าใน $x + y = 19$ ได้ $x = 19 - 23 = -4$

ดังนั้น คู่อันดับที่ต้องการคือ $(-4, 23)$

ตอบ $(-4, 23)$

วิธีทำข้อ 4

พื้นที่ผิวข้างของกรวย

ให้ V เป็นจุดยอดของกรวย O เป็นจุดศูนย์กลางฐาน และ P เป็นจุดบนเส้นรอบวงฐานตามรูป กำหนด $OP = r$ เป็นรัศมีฐาน และ $VP = \ell$ เป็นส่วนสูงเอียง

เนื่องจาก VO ตั้งฉากกับระนาบฐาน ภาพฉายตั้งฉากของ VP บนระนาบฐานคือ OP มุมระหว่างส่วนสูงเอียงกับระนาบฐานจึงเป็น $\angle VPO = 45^\circ$

รูปสามเหลี่ยม VOP เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุมแหลม 45° จึงมีด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากัน กล่าวคือ $VO = OP$ หรือ $h = r$

ใช้เงื่อนไขรัศมีฐาน $r = 2h - 6$ จะได้

$$h = 2h - 6 \implies h = 6$$

ดังนั้น $r = 6$ และจากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$\ell = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

พื้นที่ผิวข้างของกรวยเท่ากับ

$$\pi r \ell = \pi(6)(6\sqrt{2}) = 36\sqrt{2}\pi$$

ตอบ $36\sqrt{2}\pi$ ตารางหน่วย

วิธีทำข้อ 5

ค่าเฉลี่ยและผลรวมคะแนน

ให้ N เป็นจำนวนนักเรียนทั้งหมดในห้อง ครูตรวจข้อสอบแล้ว $N - 6$ คน และได้คะแนนเฉลี่ย 80 คะแนน ผลรวมคะแนนเดิมจึงเป็น $80(N - 6)$ คะแนน

เมื่อตรวจครบทุกคน คะแนนเฉลี่ยลดลง 1 คะแนน เหลือ 79 คะแนน ผลรวมคะแนนใหม่จึงเป็น $79N$ คะแนน

ผลรวมคะแนนใหม่มากกว่าผลรวมคะแนนเดิม 444 คะแนน จึงได้สมการ

$$79N - 80(N - 6) = 444$$

$$79N - 80N + 480 = 444$$

$$-N = -36$$

$$N = 36$$

ดังนั้น มีนักเรียนทั้งหมด 36 คน

ตอบ 36 คน

วิธีทำข้อ 6

วงกลมสัมผัสภายนอก

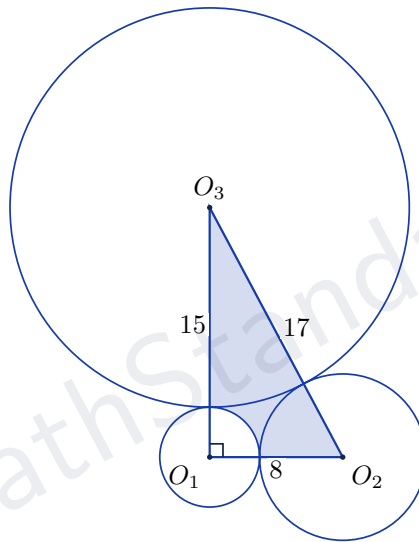
ให้รัศมีของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง O_1, O_2, O_3 เป็น r_1, r_2, r_3 ตามลำดับ จากสูตรพื้นที่วงกลมได้

$$r_1 = 3, \quad r_2 = 5, \quad r_3 = 12$$

วงกลมสัมผัสภายนอกกัน ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางแต่ละคู่จึงเท่ากับผลบวกของรัศมี ได้ว่า

$$O_1O_2 = 8, \quad O_1O_3 = 15, \quad O_2O_3 = 17$$

เนื่องจาก $8^2 + 15^2 = 17^2$ บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสให้ $\angle O_2O_1O_3 = 90^\circ$



พื้นที่รูปสามเหลี่ยม $O_1O_2O_3$ เท่ากับ $\frac{1}{2}(8)(15) = 60$ ตารางหน่วย

ส่วนที่อยู่ในวงกลม O_1 เป็นหนึ่งในสี่ของวงกลมรัศมี 3 จึงมีพื้นที่ $\frac{1}{4}\pi(3)^2 = \frac{9\pi}{4}$ ตารางหน่วย

พื้นที่แรเงาจึงเท่ากับ $60 - \frac{9\pi}{4}$ ตารางหน่วย

ตอบ $60 - \frac{9\pi}{4}$ ตารางหน่วย

วิธีทำข้อ 7

ผลคูณของพจน์กำลังสาม

ให้ P แทนผลคูณของเศษส่วนในโจทย์ โดยยังไม่รวมตัวประกอบ A สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 2$ แยกตัวประกอบได้ว่า

$$\frac{1 - k^3}{1 + k^3} = -\frac{(k - 1)(k^2 + k + 1)}{(k + 1)(k^2 - k + 1)}$$

เมื่อนำมาคูณกันตั้งแต่ $k = 2$ ถึง $k = 51$ มีเครื่องหมายลบ 50 ตัว ผลคูณจึงเป็นบวก และแยกเป็นสองส่วนได้ดังนี้

ส่วนที่หนึ่งเป็นผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้น

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{49}{51} \cdot \frac{50}{52} = \frac{1 \cdot 2}{51 \cdot 52}$$

ส่วนที่สองใช้ความสัมพันธ์ $k^2 + k + 1 = (k + 1)^2 - (k + 1) + 1$ ทำให้ตัวประกอบระหว่างพจน์ที่อยู่ติดกันตัดกันได้

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{13}{7} \cdot \frac{21}{13} \cdots \frac{51^2 + 51 + 1}{51^2 - 51 + 1} = \frac{2653}{3}$$

ดังนั้น

$$P = \frac{2}{51 \cdot 52} \cdot \frac{2653}{3} = \frac{2653}{3978}$$

จาก $AP = 18571$ และ $18571 = 7 \times 2653$ จึงได้

$$A = 18571 \cdot \frac{3978}{2653} = 7 \times 3978 = 27846$$

ตอบ 27846

วิธีทำข้อ 8

ผลรวมสมมาตร

จาก $abc = -1152 \neq 0$ ได้ว่า a, b, c ไม่เป็นศูนย์ จึงเขียนแต่ละพจน์โดยใช้ $a + b + c = 48$ ได้เป็น

$$\frac{a+b}{c} = \frac{48-c}{c} = \frac{48}{c} - 1$$

ในทำนองเดียวกัน ผลรวมที่ต้องการจึงเท่ากับ

$$48 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 3$$

เมื่อทำส่วนให้เท่ากัน จะได้

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ca + ab}{abc} = \frac{476}{-1152} = -\frac{119}{288}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a} &= 48 \left(-\frac{119}{288} \right) - 3 \\ &= -\frac{119}{6} - \frac{18}{6} \\ &= -\frac{137}{6} \end{aligned}$$

ตอบ $-\frac{137}{6}$

วิธีทำข้อ 9

มัธยฐานและฐานนิยม

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 8 จำนวนเท่ากับ $\frac{33}{4}$ ผลรวมข้อมูลจึงเท่ากับ $8 \left(\frac{33}{4} \right) = 66$ ดังนั้น

$$a + b + c = 66 - (7 + 5 + 9 + 7 + 10) = 28$$

กำหนดให้ $u < v < w$ เป็นค่าของ a, b, c ที่จัดเรียงจากน้อยไปมาก เนื่องจากเป็นจำนวนคู่ที่แตกต่างกัน จึงไม่มีค่าใดเท่ากับ 5, 7, 9 และไม่มีค่าใดเท่ากับ 10 เนื่องจากจะทำให้ 10 ปรากฏสองครั้งและเป็นฐานนิยมร่วมกับ 7

พิจารณาตำแหน่งกึ่งกลางสองตำแหน่งของข้อมูลเมื่อเรียงจากน้อยไปมาก

- ถ้าไม่มีจำนวนคู่ที่น้อยกว่า 7 ข้อมูลลำดับที่ 4 มีค่าน้อย 8 และลำดับที่ 5 มีค่าน้อย 9 มัธยฐานจึงมากกว่า 8
- ถ้ามีจำนวนคู่ที่น้อยกว่า 7 อย่างน้อยสองจำนวน ข้อมูลลำดับที่ 4 และ 5 มีค่าไม่เกิน 7 มัธยฐานจึงไม่เกิน 7

จึงต้องมีจำนวนคู่ที่น้อยกว่า 7 เพียงหนึ่งจำนวน คือ u ทำให้ข้อมูลลำดับที่ 4 เท่ากับ 7 และเพื่อให้มัธยฐานเท่ากับ 8 ข้อมูลลำดับที่ 5 ต้องเท่ากับ 9 ดังนั้น v, w ต้องมากกว่า 9 และไม่เท่ากับ 10

เนื่องจาก v, w เป็นจำนวนคู่ที่แตกต่างกัน จึงมี $v \geq 12$ และ $w \geq 14$ เมื่อใช้ $u + v + w = 28$ ได้ว่า

$$u \leq 28 - 12 - 14 = 2$$

แต่ u เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ จึงได้ $u = 2$ และ $v + w = 26$ ซึ่งทำให้ $v = 12, w = 14$

ตรวจลำดับข้อมูลได้เป็น 2, 5, 7, 7, 9, 10, 12, 14 จึงมีมัธยฐาน 8 และฐานนิยมเพียงค่าเดียวคือ 7 ดังนั้น

$$abc = uvw = 2 \times 12 \times 14 = 336$$

ตอบ 336

วิธีทำข้อ 10

ระดับน้ำเมื่อพลิกภาชนะ

ให้ Area เป็นพื้นที่หน้าตัดสามเหลี่ยมทั้งหมด ความยาวตามแนวปริซึมคงเดิม และไม่มีน้ำรั่วออก พื้นที่หน้าตัดของน้ำก่อนและหลังพลิกจึงเท่ากัน

ก่อนพลิก น้ำลึก $\frac{2}{5}H$ ส่วนอากาศเหนือผิวน้ำจึงเป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีความสูง

$$H - \frac{2}{5}H = \frac{3}{5}H$$

รูปสามเหลี่ยมส่วนอากาศคล้ายกับรูปสามเหลี่ยมหน้าตัดทั้งหมด ด้วยอัตราส่วนความยาว $\frac{3}{5}$ อัตราส่วนพื้นที่จึงเป็น $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ ดังนั้น พื้นที่หน้าตัดของน้ำเท่ากับ

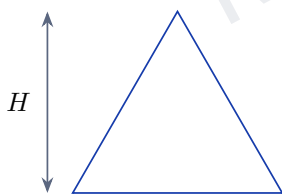
$$\left(1 - \frac{9}{25}\right) \text{Area} = \frac{16}{25} \text{Area}$$

หลังพลิก ส่วนที่เป็นน้ำมีรูปเป็นสามเหลี่ยมคล้ายกับหน้าตัดทั้งหมด โดยมีอัตราส่วนความสูง $\frac{h}{H}$ จึงได้

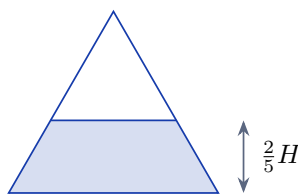
$$\left(\frac{h}{H}\right)^2 \text{Area} = \frac{16}{25} \text{Area}$$

ตัดพื้นที่หน้าตัดทั้งหมดซึ่งเป็นจำนวนบวก และใช้ $h/H > 0$ จะได้

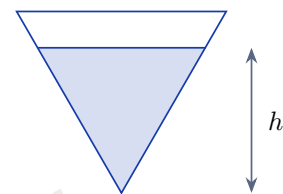
$$\frac{h}{H} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

ตอบ $\frac{4}{5}$