



MathStandard

สรุปคณิตศาสตร์

เตรียมสอบ NETSAT

ระดับมัธยมศึกษา

คำชี้แจง

เอกสารนี้สรุปหลักการและสูตรคณิตศาสตร์สำหรับทบทวนก่อนสอบ NETSAT โดยเชื่อมโยงความรู้ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นกับมัธยมศึกษาตอนปลาย จัดเนื้อหาเป็น 16 หัวข้อตามความสัมพันธ์ของแนวคิด พร้อมตาราง กราฟ และรูปเรขาคณิตที่ใช้ประกอบการอ่านสูตร

แต่ละหัวข้อระบุเงื่อนไขการนิยาม ความหมายของสัญลักษณ์ และข้อจำกัดของสูตร การนำสูตรไปใช้ต้องพิจารณาโดเมน หน่วยของปริมาณ และสมมติฐานร่วมกัน โดยเฉพาะฐานของเลขยกกำลัง การกลับเครื่องหมายอสมการ การเลือกมุม และวิธีสุม

เนื้อหา รวมสูตรหลักกับสมบัติที่เกี่ยวข้องในเรื่องเดียวกัน เพื่อให้ทบทวนได้เป็นระบบ ขอบเขตเนื้อหาจึงไม่ใช้การกำหนดจำนวนข้อรายบทหรือการรับรองรูปแบบข้อสอบในอนาคต

การค้นและเชื่อมโยงเนื้อหา

สารบัญเชื่อมโยงไปยังจุดเริ่มต้นของแต่ละหัวข้อ ดัชนีท้ายเล่มเชื่อมโยงไปยังกรอบหลักการหรือสูตรโดยตรง สูตรที่ใช้ร่วมกันหลายเรื่องอาจมีการอ้างหน้าแทนการพิมพ์ซ้ำทั้งกลุ่ม

ข้อตกลงในการอ่าน

สัญลักษณ์เดียวกันอาจแทนปริมาณต่างกันในแต่ละหัวข้อ ให้ยึดคำกำกับใกล้สูตรนั้น ภาพทั่วไปแสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบ ไม่ใช่สัดส่วนของภาพแทนข้อมูลความยาวหรือขนาดมุมที่ไม่ได้กำหนด

สารบัญ

จำนวนจริง เลขยกกำลัง กรณธ์ และทฤษฎีจำนวน	4
อัตราส่วน ร้อยละ การแปรผัน และอัตรา	9
พหุนาม สมการ และอสมการ	11
เซตและตรรกศาสตร์	15
ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และกราฟ	18
เอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม	21
ลำดับ อนุกรม และแบบรูป	24
เรขาคณิตพื้นฐานและความคล้าย	27
วงกลมและทฤษฎีบทวงกลม	30
พิกัดและภาคตัดกรวย	33
ตรีโกณมิติ	38
พื้นที่ผิวและปริมาตร	43
จำนวนเชิงซ้อน	47
การนับและความน่าจะเป็น	49
สถิติและการอ่านข้อมูล	53
แคลคูลัสพื้นฐานที่เกี่ยวข้อง	58
ดัชนีสูตร	61

เลขยกกำลังและโดเมนของราก

เลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

เมื่อ $a \neq 0$ และ $m, n \in \mathbb{Z}$

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

สำหรับฐาน 0 ใช้เฉพาะเลขชี้กำลังบวก ส่วน 0^0 และกำลังลบของ 0 ไม่กำหนดใน

เลขคณิตจำนวนจริงทั่วไป

อนุสัญญากำลังศูนย์ของพหุนามระบุแยกใน
หัวข้อทวินาม หน้า 12

เลขชี้กำลังจริง

เมื่อ $a, b > 0$ และ $s, t \in \mathbb{R}$

$$a^s a^t = a^{s+t}$$

$$(a^s)^t = a^{st}$$

$$(ab)^s = a^s b^s$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$$

การใช้กฎเหล่านี้กับกำลังจริงทั่วไปต้องกำหนด
ฐานเป็นบวก การมีนิยามจริงทั้งสองข้างเพียง
อย่างเดียวไม่รับรองกฎซ้อนกำลังเมื่อฐานลบ

กำลังตรรกยะและฐานลบ

ให้ $\frac{p}{q}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$

$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$$

ถ้า q เป็นคู่ ต้องมี $a \geq 0$ ถ้า q เป็นคี่ ใช้ฐาน
จริงได้ทุกค่า แต่เมื่อ $p \leq 0$ ต้องตัด $a = 0$ ออก
สำหรับฐานลบ แม้กำลังตรรกยะแต่ละรูปมี
นิยาม ก็ห้ามเปลี่ยนลำดับการถอดรากกับการ
ยกกำลังโดยไม่ตรวจเงื่อนไข

รากอันดับคู่และอันดับคี่

สำหรับ $x \in \mathbb{R}$ และ $m \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[2m]{x^{2m}} = |x|$$

$$\sqrt[2m+1]{x^{2m+1}} = x$$

รากอันดับคู่หมายถึงรากหลักที่ไม่เป็นลบ และมี
นิยามเมื่อจำนวนภายในรากไม่เป็นลบ ราก
อันดับคี่มีเครื่องหมายเดียวกับจำนวนภายใน
ราก

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

พหุนาม: โครงสร้างและเอกลักษณ์

พหุนามตัวแปรเดียว

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

n เป็นจำนวนเต็มไม่ลบ $a_i \in \mathbb{R}$ และ $a_n \neq 0$
เรียก n ว่าดีกรี และ a_n ว่าสัมประสิทธิ์นำ
พหุนามศูนย์ไม่กำหนดดีกรี

$$P(0) = a_0 \quad P(1) = \sum_{i=0}^n a_i$$

$$P(-1) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i$$

ผลบวกสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังคู่และกำลังคี่
เป็น

$$E = \frac{P(1) + P(-1)}{2}$$

$$O = \frac{P(1) - P(-1)}{2}$$

E คือผลบวกสัมประสิทธิ์กำลังคู่ รวมพจน์คงตัว
และ O คือผลบวกสัมประสิทธิ์กำลังคี่

เอกลักษณ์กำลังสอง

สำหรับ $u, v \in \mathbb{R}$

$$(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$$

$$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$$

v	uv	v^2
u	u^2	uv
	u	v

ภาพแสดงการแบ่งพื้นที่เมื่อ $u, v > 0$ ส่วน
เอกลักษณ์ใช้ได้กับจำนวนจริงทุกค่า

เอกลักษณ์กำลังสาม

สำหรับ $u, v \in \mathbb{R}$

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$$

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$$

$$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$$

กำลังของผลบวกไม่เท่ากับผลบวกของกำลังโดย
ทั่วไป ต้องรวมพจน์ที่เกิดจากการคูณไขว้ด้วย

การแยกตัวประกอบ

ดึงตัวประกอบร่วมก่อนพิจารณาเอกลักษณ์หรือ
การจัดกลุ่ม ให้ p, q เป็นค่าคงตัวจริง

$$uw + vw = (u + v)w$$

$$x^2 + (p + q)x + pq = (x + p)(x + q)$$

สำหรับ $ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$ และ
 $a \neq 0$ ใช้จำนวนจริง m, n ที่ทำให้

$$m + n = b \quad mn = ac$$

แล้วใช้วิธีการจัดกลุ่ม

เอกลักษณ์เทียบสัมประสิทธิ์ได้เมื่อพหุนามสอง
ข้างเท่ากันสำหรับทุกค่า x ไม่ใช่เท่ากันเฉพาะ
บางค่า

ขอบเขตจากกำลังสอง

สำหรับ $u, v \in \mathbb{R}$ มี $u^2 + v^2 \geq 2uv$ ส่วนเมื่อ
 $u, v \geq 0$ มี

$$u + v \geq 2\sqrt{uv}$$

ทั้งสองกรณีเท่ากันเมื่อ $u = v$

ผลบวกมาตรฐาน อนุกรมอนันต์ และแบบรูป

ผลบวกมาตรฐาน

สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

k เป็นดัชนีผลบวก ต้องเปลี่ยนขอบเขตให้ถูกต้อง
เมื่อใช้กับช่วงที่ไม่เริ่มจาก 1

ผลบวกหักล้าง

สำหรับลำดับ u_k ที่มีนิยามตามช่วง

และจำนวนเต็ม $m \leq n$

$$\sum_{k=m}^n (u_k - u_{k+1}) = u_m - u_{n+1}$$

หลักการคือพจน์ภายในที่มีเครื่องหมายตรงข้าม
หักล้างกัน เหลือพจน์ขอบ การแยกเศษส่วน
ย่อยต้องคงเงื่อนไขตัวส่วนไม่เป็นศูนย์

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

ถ้า $|r| < 1$ ผลบวกอนันต์ของอนุกรมเรขาคณิต
คือ

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$$

สูตรนี้ใช้ได้ทั่วไปเมื่อ $|r| \geq 1$ หาก $a_1 = 0$
ทุกพจน์เป็นศูนย์และผลรวมเป็นศูนย์ตามนิยาม
ลำดับ

การที่พจน์เข้าใกล้ศูนย์เป็นเงื่อนไขจำเป็นของ
การลู่เข้า แต่ไม่เพียงพอสำหรับอนุกรมทุกชนิด

แบบรูป รอบซ้ำ และตำแหน่ง

รอบซ้ำยาว $L \in \mathbb{N}$ ที่เริ่มตำแหน่ง 1 มีตำแหน่ง
ที่ n ภายในรอบเป็น

$$s = 1 + ((n-1) \bmod L)$$

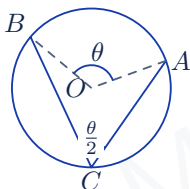
ถ้า $n = qL + r$, $0 \leq r < L$ หมายถึงครบ q
รอบและเหลือ r ตำแหน่ง ผลรวมสะสมจึงแยก
เป็นผลรวมของรอบเต็มกับส่วนที่เหลือ

แบบรูปจากภาพต้องแยกจำนวนจุด เส้น หรือ
ชิ้นส่วนที่ร่วมกัน ไม่บวกส่วนที่ทับซ้ำหลายครั้ง

วงกลม: มุม คอร์ด และเส้นสัมผัส

มุมศูนย์กลางและมุมเส้นรอบวง

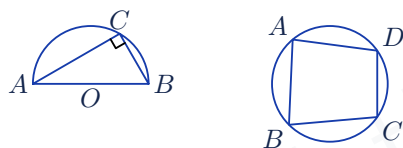
ให้ O เป็นศูนย์กลาง A, B, C อยู่บนวงกลม โดย C ไม่อยู่บนส่วนโค้ง AB ที่พิจารณา



$$\angle AOB = 2\angle ACB$$

ต้องเลือกมุมศูนย์กลางและมุมเส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้งเดียวกัน มุมศูนย์กลางอาจเป็นมุมกลับ มุมเส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้งเดียวกันเท่ากัน

ครึ่งวงกลมและสี่เหลี่ยม



ช่วย: เมื่อ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$$\angle ACB = 90^\circ$$

บทกลับใช้ตรวจว่า AB

เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมได้

หา: สี่เหลี่ยมมุม $ABCD$ มีจุดยอดเรียงบนวงกลมเดียวกัน

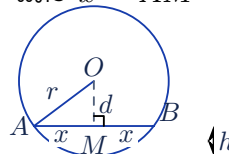
$$\angle DAB + \angle BCD = 180^\circ$$

$$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$$

มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในตรงข้าม และบทกลับใช้ตรวจการแนบในวงกลมได้

คอร์ดและระยะตั้งฉาก

ให้ O เป็นศูนย์กลาง รัศมี r และ $OM \perp AB$ โดย $d = OM$ และ $x = AM = MB$



$$x = \sqrt{r^2 - d^2} \quad AB = 2x$$

ใช้เมื่อ $0 \leq d < r$ ส่วน h ในรูปคือส่วนสูงของส่วนโค้งเล็ก เส้นตั้งฉากจากศูนย์กลางแบ่งคอร์ดครึ่งหนึ่ง และบทกลับเป็นจริง

ในวงกลมรัศมีเท่ากัน คอร์ดเท่ากันก็ต่อเมื่อห่างศูนย์กลางเท่ากัน คอร์ดขนานกันตัดส่วนโค้งระหว่างปลายคอร์ดด้านเดียวกันให้เท่ากัน

ส่วนสูงของส่วนโค้งเล็ก

ให้ r เป็นรัศมี x เป็นครึ่งคอร์ด และ h เป็นระยะจากจุดกึ่งกลางคอร์ดถึงส่วนโค้งเล็กตามแนวรัศมี ระยะจากศูนย์กลางถึงคอร์ดคือ

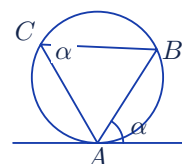
$$d = r - h$$

$$x^2 = r^2 - (r - h)^2 = 2rh - h^2$$

$$r = \frac{x^2 + h^2}{2h}$$

เงื่อนไข $x > 0$ และ $0 < h \leq r$ กรณี $h = r$ คอร์ดเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

มุมเส้นสัมผัสกับคอร์ด



มุมระหว่างเส้นสัมผัสที่ A กับคอร์ด AB เท่ากับมุมเส้นรอบวงที่รองรับคอร์ดเดียวกันในส่วนตรงข้าม ต้องเลือกทิศของมุมให้ตรงกับส่วนโค้ง

เอกลักษณ์ กราฟ โดเมน และคาบ

เอกลักษณ์พื้นฐานและมุมเพิ่มเติม

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

สูตรที่มีส่วนกลับใช้เฉพาะจุดที่ทุกฟังก์ชันมีนิยาม เอกลักษณ์ co-function เชื่อมมุมที่รวมกันเป็น $\frac{\pi}{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

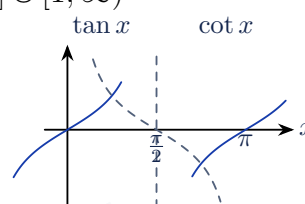
อีกทั้ง $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$
และ $\tan(-x) = -\tan x$

โดเมนและเรนจ์ของส่วนกลับ

ให้ $n \in \mathbb{Z}$ ตัดค่าเข้าที่ทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์

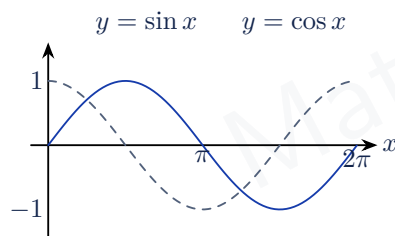
รูป	ค่าที่ตัดออก	คาบ
$\tan x, \sec x$	$\frac{\pi}{2} + n\pi$	$\pi, 2\pi$
$\cot x, \csc x$	$n\pi$	$\pi, 2\pi$

เรนจ์ของ $\tan, \cot$ คือ $\mathbb{R}$ ส่วน $\sec, \csc$ คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



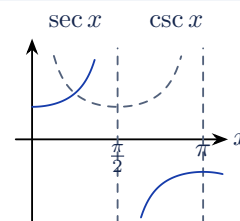
เส้นประแนวตั้งเป็นเส้นกำกับ ไม่ใช่จุดของกราฟ

กราฟไซน์และโคไซน์



ทั้งสองกราฟมีโดเมน $\mathbb{R}$ เรนจ์ $[-1, 1]$ และคาบ
มูลฐาน 2π กราฟโคไซน์เป็นการเลื่อนกราฟไซน์
ตามเอกลักษณ์มุมเพิ่มเติม ต้องแยกจุดที่
ค่าฟังก์ชันเป็นศูนย์จากจุดสูงสุดและต่ำสุด

กราฟส่วนกลับและการแปลง

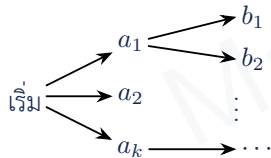


สำหรับ $y = A \sin(B(x - h)) + k$ หรือรูป
โคไซน์ เมื่อ $A, B \neq 0$ แอมพลิจูดคือ $|A|$ คาบ
คือ $\frac{2\pi}{|B|}$ และเส้นกึ่งกลางคือ $y = k$ รูป
แทนเจนต์มีคาบ $\frac{\pi}{|B|}$ แต่ไม่มีแอมพลิจูด การ
แปลงด้วยค่าสัมบูรณ์อาจเปลี่ยนคาบ จึงต้อง
พิจารณากราฟใหม่

หลักการนับ การเรียง และการเลือก

หลักการบวกและคูณ

กรณีที่แตกต่างกันและไม่ทับซ้อนใช้ผลบวกของจำนวนวิธี ขั้นตอนต่อเนื่องใช้ผลคูณเมื่อจำนวนทางเลือกแต่ละขั้นกำหนดได้สอดคล้องกับขั้นก่อน



หากจำนวนทางเลือกเปลี่ยนตามกรณี ต้องแบ่งกรณีก่อนคูณ การนับทั้งหมดลบกรณีที่ไม่ต้องการมักใช้ได้เมื่อกำหนดทั้งหมดกับส่วนเติมเต็มได้ครบ

สิ่งของซ้ำและการจัดกลุ่มติดกัน

สิ่งของรวม n ชิ้น มีชนิดซ้ำจำนวน $n_1, \dots, n_k$ และ $\sum n_i = n$ เรียงได้

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$$

กรณีสิ่งของทั้งหมด n ชิ้นต่างกัน และกำหนดไว้ว่า r ชิ้นใดต้องอยู่ติดกัน ให้รวมเป็นกลุ่มเดียว เหลือหน่วยจัดเรียง $n - r + 1$ หน่วย และจัดภายในกลุ่มได้ $r!$ แบบเมื่อไม่มีข้อจำกัดภายใน

$$(n - r + 1)! r! \quad 1 \leq r \leq n$$

$$\boxed{A_1 \ A_2 \ \cdots \ A_r} \quad \boxed{B_1} \quad \cdots$$

นับเป็นหนึ่งหน่วย

เรียงสับเปลี่ยนและจัดหมู่

สิ่งของต่างกัน n ชิ้น เลือก r ชิ้น เมื่อ $0 \leq r \leq n$ เป็นจำนวนเต็ม

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

แบบแรกสนใจลำดับ แบบหลังไม่สนใจลำดับ ใช้

$0! = 1$ และ

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

สูตรทวินามและพจน์ทั่วไปอยู่หน้า 12

รอบวงและการหลักเฉียงตำแหน่งเดิม

สิ่งของต่างกัน $n \geq 1$ ชิ้นเรียงรอบวง โดยถือการหมุนเหมือนกันแต่การสะท้อนต่างกัน มี $(n-1)!$ แบบ ไม่หารด้วย 2 เพิ่มเว้นแต่ข้อตกลงการกลับด้านและกรณีสมมาตรอนุญาตจำนวนการเรียงที่ไม่มีชิ้นใดอยู่ตำแหน่งเดิมคือ

$$D_n = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

ใช้ $n \geq 0$ และ $D_0 = 1$ เป็นอนุสัญญาการเรียงชุดว่าง

ฐานนิยมและตำแหน่งของข้อมูล

ฐานนิยมของข้อมูลจัดชั้น

สำหรับชั้นกว้างเท่ากัน เลือกชั้นฐานนิยม ให้ L เป็นขอบล่าง I เป็นความกว้าง f_m เป็นความถี่ชั้น และ f_-, f_+ เป็นความถี่ก่อนและหลัง

$$d_1 = f_m - f_- \quad d_2 = f_m - f_+ \\ M_o \approx L + \frac{d_1}{d_1 + d_2} I$$

ใช้ $d_1 + d_2 > 0$ หากมีชั้นสูงสุดหลายชั้นหรือเป็นช่วงราบ ต้องรายงานความกำกวม ไม่หารด้วยศูนย์ และไม่ใช้สูตรความถี่กับชั้นกว้างต่างกันโดยตรง

การแทรกและตำแหน่งปลาย

ให้ $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(N)}$ และตำแหน่ง h อยู่ใน $[1, N]$ ถ้า $h = j + t$, $j = [h]$ และ $0 < t < 1$

$$x_h = (1 - t)x_{(j)} + tx_{(j+1)}$$

เมื่อ $t = 0$ ใช้ $x_{(j)}$ โดยไม่ต้องมีพจน์ถัดไป หาก $h < 1$ ใช้ค่าต่ำสุด และ $h > N$ ใช้ค่าสูงสุดตามข้อตกลงเล่มนี้ กำหนด P_0 เป็นค่าต่ำสุดและ P_{100} เป็นค่าสูงสุด

สูตรแทรกไม่ใช้ดัชนีที่อยู่นอกข้อมูล และไม่ใช้การประกาศว่านิยามเปอร์เซ็นต์ไทล์ทุกวิธีให้ผลเหมือนกัน

ควอไทล์และเปอร์เซ็นต์ไทล์

ควอไทล์แบ่งตำแหน่งข้อมูลเรียงเป็นสี่ส่วน ส่วนละประมาณ 25% ข้อมูลซ้ำและจำนวนข้อมูลทำให้แต่ละส่วนไม่จำเป็นต้องมีจำนวนค่าต่างกันเท่ากัน

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 25\% & 25\% & 25\% & 25\% \\ \hline Q_1 & Q_2 & Q_3 & \end{array}$$

เล่มนี้ใช้ข้อตกลงตำแหน่งข้อมูลดิบ

$$h_{Q_k} = \frac{k(N+1)}{4} \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$h_{P_k} = \frac{k(N+1)}{100} \quad (0 < k < 100)$$

วิธีหาตำแหน่งมีหลายข้อตกลง หากกำหนดวิธีไว้ให้ยึดวิธีนั้น

ตำแหน่งของข้อมูลจัดชั้น

สำหรับเปอร์เซ็นต์ไทล์ลำดับ k ใช้ตำแหน่ง $t = \frac{kN}{100}$ เลือกชั้นที่ความถี่สะสมถึง t ให้ L เป็นขอบล่าง F เป็นความถี่สะสมก่อนชั้น $f > 0$ เป็นความถี่ชั้น และ I เป็นความกว้าง

$$P_k \approx L + \frac{t - F}{f} I$$

ใช้ $0 < k < 100$ โดยมีการแทรกสัดส่วนภายในชั้น ควอไทล์ใช้ $t = \frac{kN}{4}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3$ ไม่ใช้ตำแหน่ง $(N+1)$ ของข้อมูลดิบแทนในสูตรจัดชั้น