



MathStandard

สรุปคณิตศาสตร์

เตรียมสอบ A-Level

คณิตศาสตร์ประยุกต์ 1

คำชี้แจง

เอกสารนี้สรุปนิยาม หลักการ สูตร และเงื่อนไขทางคณิตศาสตร์ สำหรับบททบทวนวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ 1 รหัส 61 การอ่านสูตรต้องพิจารณาโดเมน ความหมายของสัญลักษณ์ และสมมติฐานที่กำกับไว้ร่วมกัน ฉบับนี้รวบรวมเนื้อหาเป็นสิบหกหัวข้อ ตั้งแต่เซตจนถึงแคลคูลัสเบื้องต้น ครอบคลุมหลักการสำคัญและเนื้อหาที่เกี่ยวข้องสำหรับเตรียมสอบ การกำหนดขอบเขตการสอบและเงื่อนไขการใช้สูตรต้องตรวจสอบร่วมกับประกาศของผู้จัดสอบแต่ละปี

การค้นและเชื่อมโยงเนื้อหา

สารบัญเชื่อมโยงไปยังจุดเริ่มต้นของแต่ละหัวข้อ ดัชนีท้ายเล่มเชื่อมโยงไปยังกลุ่มนิยามและสูตรที่เกี่ยวข้องโดยตรง ความหมายของตัวแปรระบุไว้ในแต่ละกรอบ เพื่อให้บททบทวนแยกหัวข้อได้

ขอบเขตการใช้สูตร

สูตรที่มีเศษส่วน กรณฑ์ หรือเลขชี้กำลังต้องตรวจเงื่อนไขการมีนิยามก่อนแปลงรูป การแก้สมการและอสมการต้องรักษาขอบเขตของตัวแปร และตรวจว่าขั้นตอนที่ใช้เป็นการสมมูลหรือเป็นเพียงการให้เงื่อนไขจำเป็น

ภาพและสัญลักษณ์

ภาพแสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบทั่วไป ไม่ใช่สัดส่วนของภาพแทนข้อมูลที่ไม่ได้กำหนด ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่มีเงื่อนไขเฉพาะไม่อาจนำไปใช้กับทุกกรณีโดยละเงื่อนไขนั้น

สารบัญ

เซต	4
ตรรกศาสตร์	6
จำนวนจริงและพหุนาม	8
ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	13
เอกซ์โพเนนเชียลและลอการิทึม	17
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	21
จำนวนเชิงซ้อน	27
เมทริกซ์	31
ลำดับและอนุกรม	35
เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวย	40
เวกเตอร์ในสามมิติ	46
หลักการนับ	50
ความน่าจะเป็น	54
สถิติ	58
ตัวแปรสุ่มและการแจกแจง	64
แคลคูลัสเบื้องต้น	69
ดัชนีสูตร	76

การค้นสูตร

ดัชนีท้ายเล่มเรียงกลุ่มนิยามและสูตรตามหัวข้อ กดชื่อรายการเพื่อไปยังเนื้อหาโดยตรง ตัวเลขในสารบัญและดัชนีเป็นเลขหน้าที่พิมพ์บนเอกสาร ซึ่งต่างจากลำดับหน้าในโปรแกรมอ่าน PDF เพราะหน้าปกไม่นับเลขหน้า

ภาษาเซต สับเซต และเพาเวอร์เซต

เซตและสมาชิก

เซตเป็นกลุ่มที่ระบุสมาชิกได้แน่นอน ลำดับและสมาชิกซ้ำไม่เปลี่ยนเซต สมาชิกอาจเป็นวัตถุหรือเป็นเซตอีกเซตหนึ่ง

$x \in A$: x เป็นสมาชิกของ A

$x \notin A$: x ไม่เป็นสมาชิกของ A

เซตว่าง $\emptyset = \{\}$ ไม่มีสมาชิก แต่ $\{\emptyset\}$ มีสมาชิกหนึ่งตัว จึงเป็นคนละเซต

$$n(\emptyset) = 0, \quad n(\{\emptyset\}) = 1$$

$n(A)$ ใช้กับเซตจำกัด A ส่วนเซตอนันต์ไม่ระบุจำนวนสมาชิกด้วยจำนวนเต็มไม่ลบ

สับเซตและความเท่ากัน

$A \subseteq B$ เมื่อสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B ส่วน $A \subsetneq B$ หมายถึงสับเซตแท้ คือ $A \subseteq B$ และ $A \neq B$

$$\emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq A$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ และ } B \subseteq A$$

$\in$ เชื่อมสมาชิกกับเซต ส่วน $\subseteq$ เปรียบเทียบเซตกับเซต $\emptyset \subseteq A$ จริงเสมอ แต่ $\emptyset \in A$ ต้องตรวจสอบสมาชิกของ A

เพาเวอร์เซตและจำนวนสับเซต

เพาเวอร์เซตคือเซตของสับเซตทั้งหมด

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

$$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$$

$$\emptyset \in \mathcal{P}(A), \quad A \in \mathcal{P}(A)$$

ถ้า A จำกัดและ $n(A) = n \geq 0$

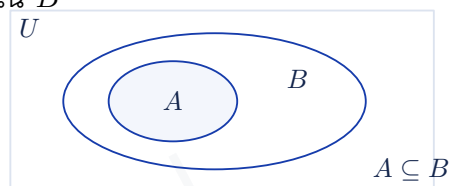
$$n(\mathcal{P}(A)) = 2^n$$

สับเซตของ A	จำนวน
สับเซตแท้	$2^n - 1$
ไม่ว่าง	$2^n - 1$
ไม่ว่างและเป็นสับเซตแท้ ($n \geq 1$)	$2^n - 2$

เมื่อ $n = 0$ ไม่มีสับเซตที่ไม่ว่างและเป็นสับเซตแท้ จึงไม่นำสูตรแถวสุดท้ายไปใช้

แผนภาพสับเซต

ให้ $A, B \subseteq U$ โดย U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ ขอบรูปสี่เหลี่ยมแทน U และบริเวณของ A อยู่ใน B



$$A \subseteq B \subseteq U$$

ภาพแสดงการรวมกันของบริเวณสมาชิก ไม่แสดงสัดส่วนจำนวนสมาชิกจากขนาดพื้นที่

เลขยกกำลัง igrณรท์ และโดเมน

เลขชี้กำลังจำนวนเต็ม

ให้ a เป็นจำนวนจริง และ m, n เป็นจำนวนเต็ม ใช้กฎต่อไปนี้เฉพาะเมื่อทุกนิพจน์มีนิยาม

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0, n > 0)$$

ไม่กำหนด 0^0 ในขอบเขตนี้ และเลขชี้กำลังลบ ไม่ใช่เครื่องหมายลบหน้าฐาน

เลขชี้กำลังจริงและฐานบวก

ให้ $a, b > 0$ และ $r, s \in \mathbb{R}$

$$a^r a^s = a^{r+s}, \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

ฐานบวกทำให้กฎนี้ใช้กับเลขชี้กำลังจริงได้ทั่วไป ถ้าฐานเป็นศูนย์ มี $0^r = 0$ เฉพาะกรณี $r > 0$

เลขชี้กำลังตรรกยะและฐานลบ

เขียน $\frac{m}{n}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ โดย $m \in \mathbb{Z}$ และ $n \geq 1$

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

เมื่อ $a < 0$ นิยามในจำนวนจริงได้เมื่อ n เป็นคี่ สำหรับ $a = 0$ ต้องมี $m > 0$ ส่วน $m \leq 0$ ต้องมี $a \neq 0$

ฐานลบต้องตรวจโดเมนก่อนและหลังจัดรูป ไม่ใช่กฎกำลังซ้อนของเลขชี้กำลังจริงโดยไม่มีเงื่อนไข

รากอันดับคู่และอันดับคี่

ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็ม รากอันดับคู่ $\sqrt[n]{a}$ มีนิยามเมื่อ $a \geq 0$ และเลือกรากที่ไม่เป็นลบ ส่วนรากอันดับคี่มีนิยามสำหรับทุก $a \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & n \text{ เป็นคู่} \\ a, & n \text{ เป็นคี่} \end{cases}$$

สำหรับรากอันดับคู่และ $a, b \geq 0$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0)$$

รากอันดับคี่ใช้สูตรผลคูณกับจำนวนจริงใด ๆ และสูตรผลหารเมื่อ $b \neq 0$

สังยุคและการกำจัดกรณรท์

เมื่อ $u, v \geq 0$

$$(\sqrt{u} + \sqrt{v})(\sqrt{u} - \sqrt{v}) = u - v$$

ถ้า $u \neq v$ จะได้

$$\frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{v}} = \frac{\sqrt{u} - \sqrt{v}}{u - v}$$

สูตรแปลงนี้ไม่ใช่เมื่อ $u = v$ แม้ตัวส่วนเดิมอาจไม่เป็นศูนย์ ต้องตรวจตัวส่วนทั้งก่อนและหลังแปลง

กรณรท์ซ้อนแบบผลบวกและผลต่าง

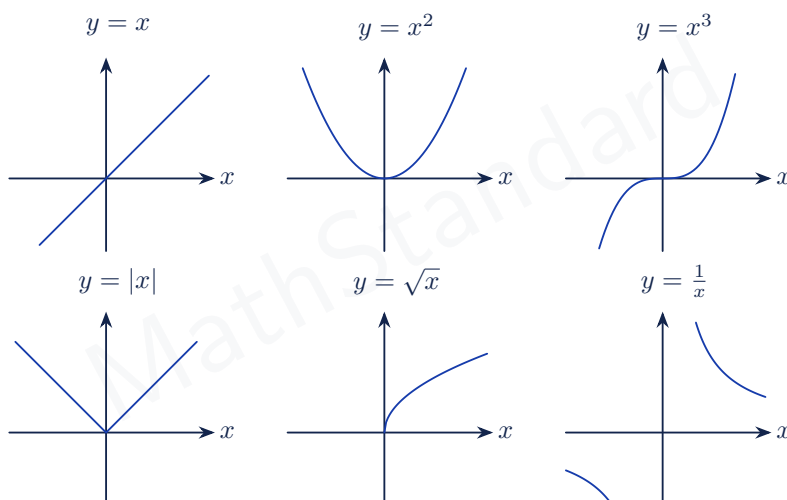
ให้ $m, n \geq 0$ และกำหนด $u = m + n$, $v = mn$ จะได้

$$\sqrt{u + 2\sqrt{v}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$$

$$\sqrt{u - 2\sqrt{v}} = |\sqrt{m} - \sqrt{n}|$$

ค่าสัมบูรณ์ในสูตรผลต่างทำให้ผลลัพธ์ไม่เป็นลบ ตามนิยามรากที่สอง

กราฟมาตรฐานและการแปลงกราฟ



โดเมนและเรนจ์ของกราฟพื้นฐาน

$f(x)$	D_f	R_f
x, x^3	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$x^2, x $	$\mathbb{R}$	$[0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R} - \{0\}$	$\mathbb{R} - \{0\}$

กราฟเป็นมาตรฐานบนโดเมนธรรมชาติที่ระบุ หากโจทย์จำกัดโดเมน ต้องหาเรนจ์จากโดเมนใหม่

ฟังก์ชันแบ่งช่วง

ให้ D_1, D_2 ไม่ทับกัน และ f_1, f_2 มีนิยามบน D_1, D_2 ตามลำดับ

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_1 \\ f_2(x), & x \in D_2 \end{cases}$$

โดเมนคือ $D_1 \cup D_2$ และเรนจ์รวมผลลัพธ์จากแต่ละช่วง การรวมจุดปลายให้ยึดเครื่องหมายของเงื่อนไขแต่ละช่วง

การเลื่อน สะท้อน และยืดหด

ให้ $A, B, h, k \in \mathbb{R}$ โดย $A, B \neq 0$ และ

$$g(x) = Af(B(x-h)) + k$$

จุด (u, v) บนกราฟ $y = f(x)$ เปลี่ยนเป็น

$$\left(h + \frac{u}{B}, k + Av\right)$$

$|A|$ เป็นตัวคูณระยะแนวตั้ง และ $\frac{1}{|B|}$ เป็นตัวคูณระยะแนวนอน เครื่องหมายลบทำให้สะท้อนก่อนเลื่อนด้วย h, k

โดเมนและเรนจ์หลังแปลง

สำหรับ $g(x) = Af(B(x-h)) + k$ และค่าคงตัวตามกรอบข้างต้น

$$D_g = \{x \mid B(x-h) \in D_f\}$$

$$R_g = \{k + Av \mid v \in R_f\}$$

กรณี $B < 0$ หรือตัวคูณแนวตั้ง $A < 0$ ต้องจัดลำดับปลายช่วงใหม่ และรักษาการรวมจุดปลายของโดเมนหรือเรนจ์เดิม

มุม วงกลมหนึ่งหน่วย และค่ามุมสำคัญ

หน่วยมุมและมุมร่วมปลาย

$$180^\circ = \pi \text{ เรเดียน}$$

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180} \theta_{\text{deg}}$$

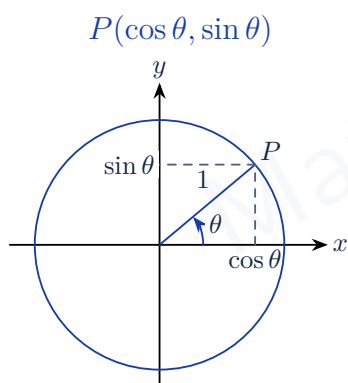
$$\theta_{\text{deg}} = \frac{180}{\pi} \theta_{\text{rad}}$$

มุมบวกวัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน x บวก มุมร่วมปลายต่างกัน $2k\pi$ เรเดียน หรือ $360^\circ k$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

สูตรในบทนี้ใช้เรเดียนหากไม่มีเครื่องหมายองศา โดย $1^\circ = 60'$ และ $1' = 60''$

วงกลมหนึ่งหน่วย

จุดบนวงกลมรัศมี 1 ที่ทำมุม θ กับแกน x บวก มีพิกัด



$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (\cos \theta \neq 0)$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (\sin \theta \neq 0)$$

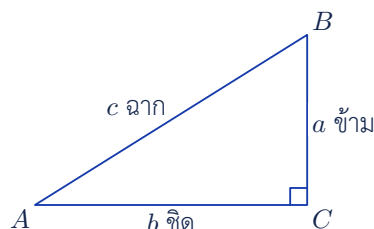
เครื่องหมายตามควอดรนต์

ควอดรนต์	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-

จุดบนแกนให้ใช้พิกัดวงกลมหนึ่งหน่วยแทน
ตารางเครื่องหมายภายในควอดรนต์

อัตราส่วนในสามเหลี่ยมมุมฉาก

ใน $\triangle ABC$ ให้ $C = 90^\circ$ ด้าน a, b, c ตรงข้ามมุม A, B, C ตามลำดับ



$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\csc A = \frac{1}{\sin A}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\cot A = \frac{1}{\tan A}$$

สูตรส่วนกลับใช้เฉพาะเมื่อตัวส่วนมีนิยามและไม่เป็นศูนย์ นิยาม $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ ยังใช้ได้เมื่อ $\tan \theta$ ไม่มีนิยามแต่ $\sin \theta \neq 0$

ตารางค่ามุมสำคัญ

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

— หมายถึงไม่มีนิยาม ค่าส่วนกลับต้องตรวจสอบตัวส่วนก่อนเสมอ

ดีเทอร์มิแนนต์และการดำเนินการตามแถว

ดีเทอร์มิแนนต์ขนาดสอง

ดีเทอร์มิแนนต์เป็นจำนวนจริงที่นิยามสำหรับเมทริกซ์จัตุรัส

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

เขียน $\det A$ หรือ $|A|$ โดย $|A|$ ในบริบทนี้ไม่ใช่ค่าสัมบูรณ์ของสมาชิก

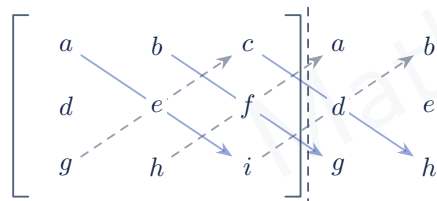
ดีเทอร์มิแนนต์ขนาดสาม

สำหรับ

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\det A = aei + bfg + cdh$$

$$-ceg - bdi - afh$$



$$\begin{array}{ccc} +aei & +bfg & +cdh \\ -ceg & -bdi & -afh \end{array}$$

วิธีคูณทแยงนี้ใช้เฉพาะขนาด 3×3 ไม่ขยายเป็นกฎเดียวกันกับขนาดที่ใหญ่กว่า

ไมเนอร์และโคแฟกเตอร์

ให้ M_{ij} เป็นดีเทอร์มิแนนต์ที่ได้เมื่อตัดแถว i และหลัก j กำหนด

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

เมื่อเลือกแถว i ใดแถวหนึ่ง

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$$

ถ้าเลือกหลัก j ให้รวม $a_{ij} C_{ij}$ ตามแถว i แทนสูตรนี้ใช้กับขนาด 2, 3 ในบทนี้

ผลต่อดีเทอร์มิแนนต์

ให้ R_i เป็นแถวที่ i และ $i \neq j$

การดำเนินการ	ดีเทอร์มิแนนต์ใหม่
--------------	--------------------

สลับ R_i, R_j	เปลี่ยนเครื่องหมาย
-----------------	--------------------

$R_i \leftarrow tR_i$	คูณด้วย t
-----------------------	-------------

$R_i \leftarrow R_i + tR_j$	เท่าเดิม
-----------------------------	----------

การลดรูปสมมูลตามแถวต้องใช้ $t \neq 0$ ในการคูณทั้งแถว ส่วนการบวกพหุคูณของแถวอื่นใช้ $t \in \mathbb{R}$ ใดก็ได้ ต้องทำกับทั้งแถวรวมด้านขวาของเมทริกซ์แต่งเติมด้วย

สมบัติดีเทอร์มิแนนต์

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A, B ขนาด n เดียวกัน และ $t \in \mathbb{R}$

$$\det A^T = \det A$$

$$\det(AB) = \det A \det B$$

$$\det(tA) = t^n \det A$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม

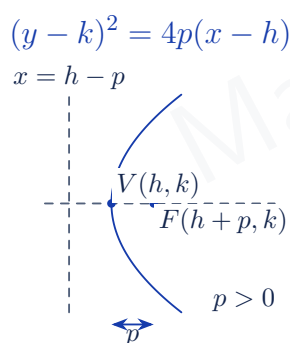
$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

ถ้ามีแถวศูนย์ หรือสองแถวเป็นสัดส่วนกัน ดีเทอร์มิแนนต์เป็นศูนย์ สมบัติเดียวกันใช้กับหลักได้โดยทั่วไป $\det(A+B)$ ไม่เท่ากับ $\det A + \det B$

พาราโบลาและพารามิเตอร์มีเครื่องหมาย

พาราโบลาและองค์ประกอบ

พาราโบลาเป็นเซตของจุดที่อยู่ห่างจากโฟกัสและเส้นไดเรกทริกซ์เท่ากัน ให้ (h, k) เป็นจุดยอด และ $p \neq 0$ เป็นพารามิเตอร์มีเครื่องหมาย



สำหรับสมการข้างต้น โฟกัสคือ $(h + p, k)$ เส้นไดเรกทริกซ์คือ $x = h - p$ และแกนสมมาตรคือ $y = k$

$p > 0$: เปิดขวา $p < 0$: เปิดซ้าย

หากสลับบทบาทของพิกัด จะได้

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

โฟกัสคือ $(h, k + p)$ เส้นไดเรกทริกซ์คือ

$y = k - p$ และแกนสมมาตรคือ $x = h$

$p > 0$: เปิดขึ้น $p < 0$: เปิดลง

ระยะจากจุดยอดถึงโฟกัสเท่ากับ $|p|$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $4|p|$ จึงต้องแยก

พารามิเตอร์ p ออกจากระยะทาง $|p|$

รูปกำลังสองและทิศเปิด

ให้ $A \neq 0$ และ $y = A(x - h)^2 + k$ เปรียบเทียบกับ $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ จะได้

$$p = \frac{1}{4A}$$

จุดยอดคือ (h, k) ถ้า $A > 0$ เปิดขึ้น ถ้า $A < 0$ เปิดลง ระยะจุดยอดถึงโฟกัสเท่ากับ $\frac{1}{4|A|}$

สำหรับ $y = Ax^2 + Bx + C$ โดย $A \neq 0$

$$h = -\frac{B}{2A}, \quad k = C - \frac{B^2}{4A}$$

เส้นสัมผัสในพิกัดเลื่อน

ให้ $X = x - h, Y = y - k$ และ (X_0, Y_0) เป็นจุดบนพาราโบลา โดย $p \neq 0$

สมการ	เส้นสัมผัส
$X^2 = 4pY$	$XX_0 = 2p(Y + Y_0)$
$Y^2 = 4pX$	$YY_0 = 2p(X + X_0)$

ต้องตรวจว่าจุดที่ใช้แทนเป็นจุดบนพาราโบลานั้นจริง สูตรนี้ไม่ต้องคำนวณความชันก่อน จึงใช้ที่จุดยอดได้ด้วย

การจัดรูปกำลังสอง

สำหรับ $A \neq 0$

$$Ax^2 + Bx + C = A \left(x + \frac{B}{2A} \right)^2 + C - \frac{B^2}{4A}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $4p$ มีเครื่องหมาย แต่ความยาวต้องเป็นบวก กรณี $p = 0$ ไม่เป็นพาราโบลาปกติ เพราะสมการลดเป็นเส้นตรงซ้ำ

ความแปรปรวน ส่วนเบี่ยงเบน และการแปลงข้อมูล

ประชากรและตัวอย่าง

ประชากร $x_1, \dots, x_N$ โดย $N \geq 1$ มีค่าเฉลี่ย μ ใช้ σ^2 แทนความแปรปรวน และ σ แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{N}$$

$$= \frac{\sum_i x_i^2}{N} - \mu^2, \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

ตัวอย่าง $x_1, \dots, x_n$ โดย $n \geq 2$ มีค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ ใช้ s^2 แทนความแปรปรวน และ s แทนส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$s^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

$$= \frac{\sum_i x_i^2 - n\bar{x}^2}{n - 1}, \quad s = \sqrt{s^2}$$

หากมีความถี่ของค่ารายตัว ให้แทนผลรวมด้วย $\sum_j f_j x_j$ และ $\sum_j f_j x_j^2$ โดยจำนวนข้อมูลคือ $\sum_j f_j$ ข้อมูลจัดชั้นใช้จุดกึ่งกลางและได้ค่าประมาณ

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยและสัมประสิทธิ์

สำหรับข้อมูล $N \geq 1$ ค่า มีค่าเฉลี่ย $\bar{x}$

$$MD = \frac{\sum_i |x_i - \bar{x}|}{N}$$

MD คือส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยรอบค่าเฉลี่ย มีหน่วยเดียวกับข้อมูล ประชากรที่เป็นข้อมูลอัตราส่วนและ $\mu > 0$ ใช้สัมประสิทธิ์การแปรผัน

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}, \quad CV\% = \frac{\sigma}{\mu} 100\%$$

ตัวอย่างใช้ $\frac{s}{\bar{x}}$ เมื่อ $\bar{x} > 0$ ถ้าค่าเฉลี่ยศูนย์จะไม่กำหนด CV ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นศูนย์เมื่อข้อมูลทุกค่าเท่ากัน

ผลของการแปลงเชิงเส้น

ให้ทุกค่าแปลงตาม $Y = aX + b$ โดย $a, b \in \mathbb{R}$ คงตัว

ค่าสรุปเดิม	ค่าสรุปใหม่
μ_X	$a\mu_X + b$
σ_X^2	$a^2\sigma_X^2$
σ_X	$ a \sigma_X$

R_X, MD_X, IQR_X คูณด้วย $|a|$

ใช้หลักเดียวกันกับ $\bar{x}, s^2, s$ ถ้า $a < 0$ ลำดับข้อมูลกลับด้าน ภายใต้ข้อตกลงตำแหน่งในเล่ม

$$P_r(Y) = aP_{100-r}(X) + b$$

ถ้า $a > 0$ ใช้ $aP_r(X) + b$ ถ้า $a = 0$ ทุกค่าเท่ากับ b การกระจายเป็นศูนย์ การเลื่อนไม่เปลี่ยนการกระจายสัมบูรณ์แต่เปลี่ยน CV ได้

การรวมความแปรปรวนประชากร

กลุ่มไม่ซ้ำกันที่ j มีจำนวน $n_j \geq 1$ ค่าเฉลี่ย μ_j และความแปรปรวนประชากร σ_j^2 ให้

$$N = \sum_j n_j$$

$$\mu = \frac{\sum_j n_j \mu_j}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_j n_j [\sigma_j^2 + (\mu_j - \mu)^2]}{N}$$

รวมทั้งการกระจายภายในและระหว่างกลุ่ม ไม่เฉลี่ยความแปรปรวนภายในอย่างเดียว ถ้าแก้ข้อมูล เก็บ $S_1 = N\mu$ และ $S_2 = N(\sigma^2 + \mu^2)$ แล้วปรับผลรวมกับจำนวนข้อมูลใหม่ก่อนคำนวณ

$$\mu' = \frac{S'_1}{N'}, \quad \sigma'^2 = \frac{S'_2}{N'} - (\mu')^2$$

โดย $N' > 0$ และ S'_1, S'_2 คือผลรวมค่าและกำลังสองหลังแก้

การแจกแจงปกติและพื้นที่ใต้โค้ง

พารามิเตอร์และค่ามาตรฐาน

ให้ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ โดย μ เป็นค่าเฉลี่ย σ^2 เป็นความแปรปรวน และ $\sigma > 0$ เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

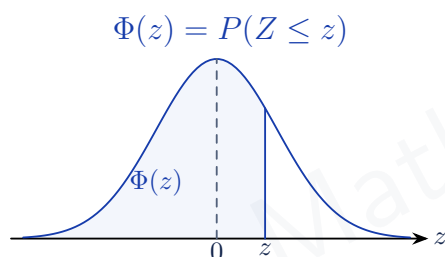
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$x = \mu + z\sigma$$

โค้งปกติสมมาตรรอบค่าเฉลี่ย มีพื้นที่รวมเท่ากับ 1 การแปลงข้อมูลเป็นค่ามาตรฐานเพียงอย่างเดียวไม่ได้ทำให้ข้อมูลทุกชนิดมีการแจกแจงปกติ

พื้นที่สะสมทางซ้าย

สำหรับ $Z \sim N(0, 1)$ นิยาม



$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

$$P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$$

Φ แทนความน่าจะเป็นสะสม ไม่ใช่ความสูงของโค้ง ตัวแปรต่อเนื่องมี $P(Z = z) = 0$ จึงรวมปลายช่วงหรือไม่รวมก็ได้พื้นที่เท่ากัน

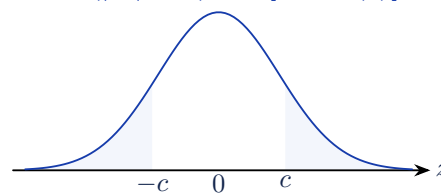
ช่วงกลางและสองหาง

สำหรับ $Z \sim N(0, 1)$ เมื่อ $a < b$ และ $c > 0$

$$P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

$$P(|Z| < c) = 2\Phi(c) - 1$$

$$P(|Z| > c) = 2[1 - \Phi(c)]$$



ภาพแรเงาแสดง $Z < -c$ หรือ $Z > c$ ซึ่งเป็นสองบริเวณแยกกัน ต้องรวมพื้นที่ของทั้งสองหาง

ชนิดของตารางพื้นที่

ให้ $z > 0$ และ $Z \sim N(0, 1)$

ตารางระบุ	แปลงเป็น $\Phi(z)$
$L(z) = P(Z \leq z)$	$\Phi(z) = L(z)$
$A(z) = P(0 < Z < z)$	$\Phi(z) = \frac{1}{2} + A(z)$
$T(z) = P(Z > z)$	$\Phi(z) = 1 - T(z)$

L, A, T เป็นชื่อพื้นที่ตามนิยามในตารางนี้ ต้องตรวจภาพแรเงาหรือหัวตารางก่อนใช้ค่าจากตารางที่ได้รับ

การแปลงขอบช่วง

สำหรับ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ เมื่อ $\sigma > 0$ และ $L < U$

$$P(L < X < U) = \Phi\left(\frac{U - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{L - \mu}{\sigma}\right)$$

ลิมิตและความต่อเนื่อง

ลิมิตสองด้านและกฎพื้นฐาน

ลิมิตที่ $x = a$ มีค่า $L \in \mathbb{R}$ ก็ต่อเมื่อลิมิตซ้ายและลิมิตขวามีค่าจำกัดเท่ากัน

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

ถ้า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ โดย α, β เป็นค่าคงตัว จะได้

$$\lim_{x \rightarrow a} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L + \beta M$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = LM$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$$

สำหรับพหุนามใช้การแทนค่าได้ ส่วนรูป $\frac{0}{0}$ เป็นรูปไม่กำหนด ต้องจัดรูปหรือพิจารณาลิมิตเพิ่มเติม

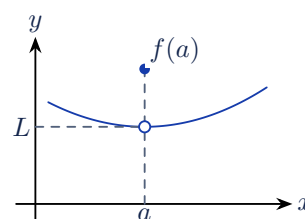
การจัดรูปและการเข้าใกล้

ลิมิตพิจารณาค่าใกล้จุดโดยไม่จำเป็นต้องใช้ค่าที่จุดนั้น พหุนามใช้การแทนค่าได้ ฟังก์ชันตรรกยะใช้ได้เมื่อตัวส่วนที่จุดไม่เป็นศูนย์ รูป $\frac{0}{0}$ ไม่ใช่คำตอบ ให้แยกตัวประกอบ คูณสังยุค หรือรวมเศษส่วน แล้วพิจารณานิพจน์ที่เท่ากันในบริเวณใกล้จุด การตัดตัวประกอบไม่คืนค่าที่ถูกห้ามในนิพจน์เดิม แต่ใช้หาลิมิตได้หากนิพจน์เท่ากันรอบจุดที่พิจารณา

ความต่อเนื่องที่จุดหนึ่ง

f ต่อเนื่องที่จุดภายในโดเมน a เมื่อ $f(a)$ มีนิยาม ลิมิตมีอยู่ และ

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$



ภาพแสดงกรณีลิมิตเท่ากับ L แต่ $f(a) \neq L$ จึงไม่ต่อเนื่องที่ a ที่ปลายช่วงให้พิจารณาด้านเดียวจากภายในช่วง

ลิมิตที่อนันต์ของฟังก์ชันตรรกยะ

ให้เศษและส่วนเป็นพหุนามไม่เป็นศูนย์ มีดีกรี m, n และสัมประสิทธิ์นำ $\alpha, \beta \neq 0$ ตามลำดับ เมื่อ $x \rightarrow +\infty$ หรือ $x \rightarrow -\infty$

ดีกรี ลิมิต

$$m < n \quad 0$$

$$m = n \quad \frac{\alpha}{\beta}$$

$$m > n \quad \text{ตรวจ } \frac{\alpha}{\beta} x^{m-n}$$

กรณีสุดท้ายตรวจเครื่องหมายและทิศทางแยกกัน ∞ ไม่ใช่จำนวนจริง และ $\sqrt{x^2} = |x|$ เสมอ