



MathStandard

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์

เตรียมความพร้อมเข้า ม.4

สำหรับเตรียมสอบ MWIT และโครงการ วมว. รอบ 1

คำชี้แจง

ฉบับปรับปรุง 2.1

จัดทำโดย MathStandard

เอกสารสรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อประกอบการทบทวนและเตรียมความพร้อมเข้า ม.4 สำหรับการสอบ MWIT และโครงการ รวมว. รอบ 1 เนื้อหาแบ่งเป็นสามหมวด ได้แก่ จำนวนและพีชคณิต เรขาคณิต และการนับและความน่าจะเป็น โดยสรุปนิยาม สมบัติ และสูตรสำคัญ พร้อมตัวอย่างและวิธีทำประกอบในแต่ละหัวข้อ

1. ศึกษาความหมายของสัญลักษณ์และเงื่อนไขกำกับสูตรก่อนนำไปใช้ โดยพิจารณาขอบเขตของจำนวน และข้อกำหนดของแต่ละปัญหา
2. ตัวอย่างสั้นแสดงการใช้สมบัติหรือสูตรเบื้องต้น ส่วนตัวอย่างประยุกต์แสดงลำดับการให้เหตุผลและการเชื่อมโยงความรู้ในหัวข้อนั้น
3. คำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็มแสดงในรูปเศษส่วนหรือกรณฑ์อย่างง่าย เว้นแต่โจทย์กำหนดเป็นอย่างอื่น และระบุหน่วยเมื่อเกี่ยวข้องกับปริมาณ
4. รูปประกอบใช้แสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ ไม่จำเป็นต้องเขียนตามมาตราส่วน ให้ยึดข้อมูลและเงื่อนไขที่ระบุในข้อความ

เอกสารนี้จัดทำโดย MathStandard เพื่อประกอบการเตรียมสอบ ชื่อโรงเรียนและโครงการที่ปรากฏใช้เพื่อระบุการสอบเป้าหมายเท่านั้น เอกสารนี้ไม่ใช่ข้อสอบทางการ และไม่ได้จัดทำร่วมกับหรือได้รับการรับรองจากหน่วยงานเจ้าของการสอบ

สารบัญ

หมวด 1 จำนวนและพีชคณิต

1.1	จำนวนเต็มและตัวประกอบ	3
1.2	การหารลงตัวและเศษ	5
1.3	เลขยกกำลังและกรณฑ์	7
1.4	ค่าสัมบูรณ์และกรณฑ์ซ้อน	9
1.5	พหุนามและการแยกตัวประกอบ	11
1.6	สมการและเงื่อนไขของคำตอบ	13
1.7	ระบบสมการ	15
1.8	อัตราส่วนและร้อยละ	17
1.9	อัตราเร็วและการเคลื่อนที่	19
1.10	ลำดับและผลรวม	21
1.11	แบบรูปและการตัดทอน	23
1.12	นิยามใหม่และเลขฐาน	25

หมวด 2 เรขาคณิต

2.1	มุม เส้นขนาน และรูปหลายเหลี่ยม	27
2.2	พีทาโกรัสและความยาว	29
2.3	ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย	32
2.4	พื้นที่ของรูปเรขาคณิต	34
2.5	วงกลมและภาควงกลม	36
2.6	มุม คอร์ด และเส้นสัมผัส	38
2.7	พิกัดและการแปลงรูป	41
2.8	ปริมาตรของรูปทรง	43
2.9	พื้นที่ผิวและหน่วยวัด	45

หมวด 3 การนับและความน่าจะเป็น

3.1	หลักการนับเบื้องต้น	47
3.2	การเรียงและการเลือก	49
3.3	การนับภายใต้เงื่อนไข	51
3.4	ความน่าจะเป็น	53
3.5	การแข่งขันและกราฟ	55
3.6	สถิติ: ค่ากลางและการกระจาย	57
3.7	การอ่านและวิเคราะห์ข้อมูล	59

จำนวนและพีชคณิต

1.1 จำนวนเต็มและตัวประกอบ

จำนวนเฉพาะมีตัวประกอบบวกเพียงสองตัว คือ 1 และตัวมันเอง จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ทุกจำนวนแยกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะได้ โดยไม่นับลำดับของตัวประกอบ

การแยกตัวประกอบ ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

ให้ $N = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$ โดย p_i เป็นจำนวนเฉพาะต่างกัน และ e_i เป็นจำนวนเต็มบวก

$$d(N) = (e_1 + 1)(e_2 + 1) \cdots (e_k + 1)$$

เมื่อ $a = \prod p_i^{\alpha_i}$ และ $b = \prod p_i^{\beta_i}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\gcd(a, b) = \prod p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$$

$$\text{lcm}(a, b) = \prod p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$$

$$\gcd(a, b) \text{lcm}(a, b) = ab$$

สัญลักษณ์ $\prod$ หมายถึงผลคูณ ใช้จำนวนเฉพาะชุดเดียวกัน และใส่เลขชี้กำลัง 0 ให้ตัวที่ไม่ปรากฏ

ความหมายและการเลือกใช้

- $d(N)$ คือจำนวนตัวประกอบบวกของ N เพราะเลขชี้กำลังของ p_i ในตัวประกอบเลือกได้ตั้งแต่ 0 ถึง e_i
- ห.ร.ม. คือจำนวนเต็มบวกมากที่สุดที่หารทุกจำนวนลงตัว ใช้แบ่งสิ่งของเป็นกลุ่มเท่ากันให้มีขนาดมากที่สุด
- ค.ร.น. คือพหุคูณร่วมบวกที่น้อยที่สุด ใช้หาจังหวะที่เหตุการณ์รอบซ้ำเกิดพร้อมกัน

ตัวอย่าง กำหนด $a = 90, b = 126$ จงหา $\gcd(a, b), \text{lcm}(a, b)$ และ $d(a)$

วิธีทำ จาก $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ และ $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ ได้

$$\gcd(90, 126) = 18, \quad \text{lcm}(90, 126) = 630$$

ส่วน 90 มีตัวประกอบบวก $(1 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 12$ ตัว

สมบัติที่เกี่ยวข้อง

จำนวนเต็มบวกเป็นกำลังสองสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อเลขชี้กำลังทุกตัวในการแยกตัวประกอบเฉพาะเป็นจำนวนคู่ ส่วนจำนวนที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กันมี ห.ร.ม. เท่ากับ 1

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.1

ห้องปฏิบัติการมีชิ้นส่วนสองชนิดจำนวน 40 และ 60 ชิ้น ต้องการแบ่งชิ้นส่วนแต่ละชนิดเป็นกลุ่ม กลุ่มละ g ชิ้น โดยไม่ปะปนชนิดและไม่เหลือเศษ ให้ g มีค่ามากที่สุด เครื่องตรวจสองเครื่องส่งสัญญาณทุก g^3 วินาที และทุก 1200 วินาที ตามลำดับ หากเริ่มส่งสัญญาณพร้อมกัน จะส่งสัญญาณพร้อมกันครั้งถัดไปเมื่อผ่านไปกี่วินาที

วิธีทำ

จำนวนชิ้นส่วนต่อกลุ่มมากที่สุดคือ

$$g = \gcd(40, 60) = 20$$

เครื่องแรกจึงส่งสัญญาณทุก $20^3 = 8000$ วินาที ระยะเวลาที่ทั้งสองเครื่องส่งสัญญาณพร้อมกันครั้งถัดไปคือ ค.ร.น. ของ 8000 กับ 1200

$$8000 = 2^6 \cdot 5^3, \quad 1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$$

เลือกเลขชี้กำลังสูงสุดของจำนวนเฉพาะแต่ละตัว ได้

$$\text{lcm}(8000, 1200) = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^3 = 24000$$

ตอบ 24000 วินาที

จำนวนและพีชคณิต

1.2 การหารลงตัวและเศษ

การหารจำนวนเต็ม N ด้วยจำนวนเต็มบวก d ให้ผลหารจำนวนเต็ม q และเศษ r เพียงคู่เดียว โดยเศษต้องไม่เป็นลบและน้อยกว่าตัวหาร

การหารและการนับพหุคูณ

$$N = dq + r, \quad 0 \leq r < d$$

จำนวนพหุคูณของ d ในช่วงจำนวนเต็ม L ถึง U ซึ่งรวมปลายทั้งสองคือ

$$M_d = \left\lfloor \frac{U}{d} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{L-1}{d} \right\rfloor$$

$$\text{หารด้วย } a \text{ หรือ } b \text{ ลงตัว : } M_a + M_b - M_{\text{lcm}(a,b)}$$

$$\text{หารลงตัวเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง : } M_a + M_b - 2M_{\text{lcm}(a,b)}$$

สัญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$ คือจำนวนเต็มมากที่สุดที่ไม่เกิน x เช่น $\lfloor 4.8 \rfloor = 4$ และ $\lfloor -1.2 \rfloor = -2$

สมบัติของเศษ

เขียน $a \equiv r \pmod{d}$ เมื่อ a และ r มีเศษเท่ากันเมื่อหารด้วย d หาก $a \equiv r$ และ $b \equiv s \pmod{d}$ จะได้

$$a + b \equiv r + s, \quad ab \equiv rs, \quad a^n \equiv r^n \pmod{d}$$

โดย n เป็นจำนวนเต็มบวก จึงลดเศษได้ทุกขั้นของการบวกหรือคูณ แต่ไม่ตัดตัวคูณหรือหารความสัมพันธ์โดยไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

เกณฑ์หารลงตัวที่ใช้อยู่

ตัวหาร	เกณฑ์สำหรับจำนวนเต็มบวกที่เขียนในฐานสิบ
2, 5, 10	พิจารณาหลักหน่วยเป็นเลขคู่ เป็น 0 หรือ 5 และเป็น 0 ตามลำดับ
3, 9	ผลบวกเลขโดดหารด้วย 3 หรือ 9 ลงตัว ตามลำดับ
4, 8	จำนวนจากสองหลักท้ายหารด้วย 4 ลงตัว หรือสามหลักท้ายหารด้วย 8 ลงตัว
11	ผลต่างของผลบวกเลขโดดในตำแหน่งสลับกันหารด้วย 11 ลงตัว

ตัวอย่าง มีหมายเลขตั้งแต่ 1 ถึง 60 ต้องเลือกหมายเลขที่หารด้วย 6 หรือ 10 ลงตัว

วิธีทำ ค.ร.น. ของ 6, 10 คือ 30 จำนวนหมายเลขที่เลือกได้จึงเป็น $10 + 6 - 2 = 14$ หมายเลข

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.2

หน่วยทดลองแห่งหนึ่งมีตัวอย่าง N ชิ้น เมื่อนำลงภาค ภาคละ 9 ชิ้น จะได้ภาคเต็มจำนวนหนึ่งและเหลือ 5 ชิ้น อีกหน่วยหนึ่งมีตัวอย่าง $3N$ ชิ้น เมื่อนำลงภาค ภาคละ 29 ชิ้น จะได้จำนวนภาคเต็มเท่ากับหน่วยแรก และเหลือ 7 ชิ้น จงหาจำนวนตัวอย่างของหน่วยแรก

วิธีทำ

ให้ q เป็นจำนวนภาคเต็มของแต่ละหน่วย เขียนความสัมพันธ์จากการหารได้เป็น

$$N = 9q + 5, \quad 3N = 29q + 7$$

แทนค่า N จากสมการแรก

$$3(9q + 5) = 29q + 7 \implies 2q = 8$$

ดังนั้น $q = 4$ และ $N = 9(4) + 5 = 41$

ตอบ 41 ชิ้น

จำนวนและพีชคณิต

1.3 เลขยกกำลังและกรณฑ์

เลขยกกำลังย่อการคูณซ้ำ ส่วนกรณฑ์หลักกำลังสอง $\sqrt{a}$ หมายถึงจำนวนที่ไม่เป็นลบซึ่งยกกำลังสองแล้วได้ a จึงต้องมี $a \geq 0$ ในระบบจำนวนจริง

กฎเลขยกกำลังและกรณฑ์

สำหรับเลขชี้กำลังจำนวนเต็ม โดยทุกนิพจน์ต้องมีความหมาย

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad (ab)^n = a^n b^n$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0)$$

สำหรับ $a > 0$ และจำนวนเต็มบวก n มี $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0), \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

$$\sqrt{x^2} = |x|, \qquad u\sqrt{a} + v\sqrt{a} = (u+v)\sqrt{a}$$

คอนจูเกต

นิพจน์ $u + v$ และ $u - v$ เป็นคู่คอนจูเกต ผลคูณเป็น $u^2 - v^2$ จึงใช้กำจัดกรณฑ์จากตัวส่วนได้เมื่อทั้งตัวส่วนเดิมและตัวคูณไม่เป็นศูนย์

$$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b} \quad (a, b \geq 0, a \neq b)$$

ตัวอย่าง จัดรูป $\sqrt{12} + \sqrt{27}$ และ $\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$

วิธีทำ ดึงตัวประกอบกำลังสองออกจากกรณฑ์ และคูณด้วยคอนจูเกต ได้

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{7 - 6} = \sqrt{7} + \sqrt{6}$$

เงื่อนไขสำคัญ

$(-3)^2 = 9$ แต่ $-3^2 = -9$ และโดยทั่วไป $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ การรวมกรณฑ์ต้องจัดส่วนที่อยู่ในรากให้เหมือนกันก่อน

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.3

เขียนนิพจน์

$$\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$$

ในรูป $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$ โดย a, b, c เป็นจำนวนเต็ม จงหาค่า $2a + b - c$

วิธีทำ

คูณเศษและส่วนของแต่ละพจน์ด้วยคอนจูเกตของตัวส่วน

$$\begin{aligned}\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} &= \frac{6\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 3\sqrt{6} + 3\sqrt{2} \\ \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} &= \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)}{2-1} = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

เมื่อนำมาลบกัน ได้ $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - \sqrt{6}$ จึงมี $a = 3, b = 4, c = -1$ และ

$$2a + b - c = 2(3) + 4 - (-1) = 11$$

ตอบ 11

จำนวนและพีชคณิต

1.4 ค่าสัมบูรณ์และกรณฑ์ซ้อน

ค่าสัมบูรณ์ $|x - a|$ คือระยะห่างระหว่าง x กับ a บนเส้นจำนวน จึงมีค่าไม่เป็นลบเสมอ

ค่าสัมบูรณ์และเงื่อนไขของกรณฑ์

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \quad |xy| = |x||y|$$

เมื่อ $r > 0$ มีความสัมพันธ์

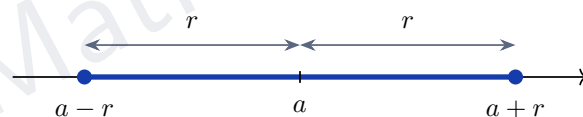
$$|x - a| = r \iff x = a - r \text{ หรือ } x = a + r$$

$$|x - a| < r \iff a - r < x < a + r$$

$$|x - a| > r \iff x < a - r \text{ หรือ } x > a + r$$

เมื่อเปลี่ยนเป็น $\leq$ หรือ $\geq$ ให้รวมจุดปลายตามเครื่องหมาย

$$\sqrt{M - \sqrt{x}} = p \iff x = (M - p^2)^2, \quad p \geq 0, \quad M - p^2 \geq 0$$



ช่วงคำตอบของ $|x - a| < r$ ไม่รวมจุดปลายทั้งสอง

การแปลงสมการที่มีกรณฑ์

สมการ $\sqrt{u} = v$ เทียบเท่ากับ $u = v^2$ และ $v \geq 0$ การยกกำลังสองโดยไม่เก็บเงื่อนไขนี้อาจเพิ่มคำตอบ จึงต้องตรวจค่าที่ได้ในสมการเดิม

ตัวอย่าง แก้สมการ $\sqrt{20 - \sqrt{x}} = 4$

วิธีทำ ยกกำลังสองได้ $\sqrt{x} = 20 - 16 = 4$ จึงมี $x = 16$ และแทนกลับได้

$$\sqrt{20 - \sqrt{16}} = \sqrt{20 - 4} = 4$$

ถ้า $r = 0$ สมการ $|x - a| = 0$ มีคำตอบเดียวคือ $x = a$ ส่วนสมการที่กำหนดค่าสัมบูรณ์ให้เท่ากับจำนวนลบไม่มีคำตอบจริง

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.4

กำหนดค่าของแบบจำลองเป็น $F(t) = \sqrt{130 - \sqrt{t}}$ โดย t เป็นจำนวนเต็มไม่ลบที่ทำให้กรณฑ์มีค่าเป็นจำนวนจริง จงหาจำนวนค่า t ทั้งหมดที่ทำให้ $F(t)$ เป็นจำนวนเฉพาะ

วิธีทำ

ให้ $F(t) = p$ โดย p เป็นจำนวนเฉพาะ จะได้

$$\sqrt{t} = 130 - p^2 \geq 0, \quad t = (130 - p^2)^2$$

ดังนั้น $p^2 \leq 130$ เนื่องจาก $11^2 \leq 130 < 12^2$ จำนวนเฉพาะที่เป็นไปได้คือ 2, 3, 5, 7, 11

p	2	3	5	7	11
$130 - p^2$	126	121	105	81	9
t	15876	14641	11025	6561	81

ทุกค่าเป็นจำนวนเต็มไม่ลบต่างกัน และแทนกลับในนิยามได้ค่าของ p ตามที่กำหนด

ตอบ 5 ค่า

จำนวนและพีชคณิต

1.5 พหุนามและการแยกตัวประกอบ

การแยกตัวประกอบคือการเขียนพหุนามเป็นผลคูณ ควรตรวจตัวประกอบร่วมก่อน แล้วเลือกเอกลักษณ์ที่ตรงกับรูปของพหุนาม

เอกลักษณ์พีชคณิต

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$x^2 + (r + s)x + rs = (x + r)(x + s)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

	b	ab	b^2
		a^2	ab
a		a	b

พื้นที่สี่ส่วนอธิบายสูตร $(a + b)^2$ เมื่อ $a, b > 0$

ตัวอย่าง แยกตัวประกอบ $x^2 - 7x + 12$

วิธีทำ จำนวนสองจำนวนที่บวกกันได้ -7 และคูณกันได้ 12 คือ $-3, -4$ จึงได้ $(x - 3)(x - 4)$

เชื่อมโยงกับจำนวนเต็ม

ถ้า $a^2 - b^2 = N$ ให้ $u = a - b$, $v = a + b$ จะมี $uv = N$ และ $a = (u + v)/2$, $b = (v - u)/2$ การให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกต้องเลือก $v > u > 0$ และ u, v มีสภาพคู่ที่เหมือนกัน การตัดทอนเศษส่วนทำได้ออกกับตัวประกอบร่วมที่ไม่เป็นศูนย์ ไม่ตัดพจน์ในผลบวกโดยตรง

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.5

จงหาจำนวนคู่ลำดับ (m, n) ที่ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกและสอดคล้องกับ

$$mn^2 + 2n = 26m - 6n^2$$

วิธีทำ

รวบรวมพจน์ที่มี m และแยกตัวประกอบ จะได้

$$m(26 - n^2) = 6n^2 + 2n = 2n(3n + 1)$$

ด้านขวาเป็นบวกและ $m > 0$ จึงต้องมี $n^2 < 26$ ดังนั้น n เป็นได้เพียง 1, 2, 3, 4, 5

$$m = \frac{2n(3n + 1)}{26 - n^2}$$

n	1	2	3	4	5
m	8/25	14/11	60/17	52/5	160

มีเพียง $n = 5$ ที่ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก จึงได้คู่ลำดับ $(160, 5)$

ตอบ 1 คู่ได้แก่ $(160, 5)$

จำนวนและพีชคณิต

1.6 สมการและเงื่อนไขของคำตอบ

คำตอบของสมการต้องทำให้สมการเดิมเป็นจริง การคูณหรือหารด้วยนิพจน์ต้องระบุกรณีที่นิพจน์นั้นเป็นศูนย์ และการยกกำลังสองต้องตรวจคำตอบย้อนหลัง

สมการเชิงเส้นและสมการกำลังสอง

$$ax + b = c \implies x = \frac{c - b}{a} \quad (a \neq 0)$$

สำหรับ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$ ให้ $\Delta = b^2 - 4ac$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Δ	> 0	$= 0$	< 0
จำนวนคำตอบจริงต่างกัน	2	1	0

ถ้ามีรากจริง α, β โดยนับรากซ้ำด้วย จะมี

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

การแยกตัวประกอบและกำลังสองสมบูรณ์

สมบัติ $UV = 0$ ให้ $U = 0$ หรือ $V = 0$ ส่วน $U^2 + V^2 = 0$ ในระบบจำนวนจริงให้ $U = V = 0$

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

จึงได้จุดยอดของพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ เป็น $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ และแกนสมมาตรคือ $x = -b/(2a)$ เมื่อ $a > 0$ กราฟหงายและมีค่าต่ำสุด เมื่อ $a < 0$ กราฟคว่ำและมีค่าสูงสุด

ตัวอย่าง แผ่นป้ายสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาวกว่ากว้าง 2 เมตร มีพื้นที่ 48 ตารางเมตร

วิธีทำ ให้ความกว้างเป็น $x > 0$ จะมี

$$x(x + 2) = 48 \iff (x + 8)(x - 6) = 0$$

จึงได้ความกว้าง 6 เมตร และความยาว 8 เมตร

อสมการ

การคูณหรือหารอสมการด้วยจำนวนลบต้องกลับทิศเครื่องหมาย เช่น $-2x < 6$ ให้ $x > -3$ ส่วนสมการที่มีเศษส่วนต้องตัดค่าที่ทำให้ตัวส่วนเดิมเป็นศูนย์ออก

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.6

จำนวนจริง x, y, z ทำให้

$$(x + y - 6)^2 + 2(y + z - 7)^2 + 3(x + z - 9)^2 = 0$$

จงหาค่า $xy + yz + zx$

วิธีทำ

ทุกพจน์ทางซ้ายไม่เป็นลบ ผลรวมเป็นศูนย์ได้เมื่อกำลังสองทั้งสามพจน์เป็นศูนย์ จึงมี

$$x + y = 6, \quad y + z = 7, \quad x + z = 9$$

บวกทั้งสามสมการ ได้ $2(x + y + z) = 22$ หรือ $x + y + z = 11$ ดังนั้น

$$x = 11 - 7 = 4, \quad y = 11 - 9 = 2, \quad z = 11 - 6 = 5$$

แทนค่าในนิพจน์ที่ต้องการ

$$xy + yz + zx = 4(2) + 2(5) + 5(4) = 38$$

ตอบ 38

จำนวนและพีชคณิต

1.7 ระบบสมการ

คำตอบของระบบสมการคือค่าตัวแปรที่ทำให้สมการทุกสมการเป็นจริงพร้อมกัน ระบบสมการสองตัวแปรแก้ได้ด้วยการแทนค่าหรือกำจัดตัวแปร

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \quad D = ad - bc$$

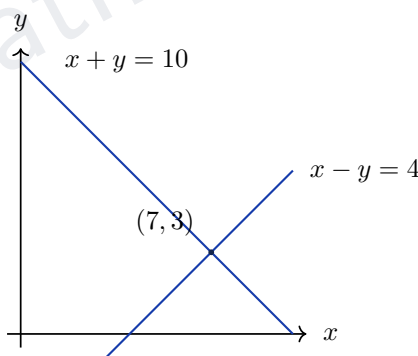
เมื่อ $D \neq 0$ ระบบมีคำตอบเดียว

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

ถ้า $D = 0$ ต้องพิจารณาว่าสมการสอดคล้องกันหรือขัดแย้งกัน ห้ามใช้สูตรหารด้วย D

ความหมายเชิงกราฟ

เมื่อแต่ละสมการแทนเส้นตรง เส้นตัดกันให้คำตอบเดียว เส้นขนานต่างเส้นไม่มีคำตอบ และเส้นเดียวกันมีคำตอบไม่จำกัด



จุดตัดเป็นคำตอบที่สอดคล้องกับสมการทั้งสอง

ตัวอย่าง แก่ระบบ $x + y = 10$ และ $x - y = 4$

วิธีทำ บวกสองสมการได้ $2x = 14$ จึงมี $x = 7$ และแทนกลับได้ $y = 3$

การตั้งระบบสมการจากสถานการณ์

กำหนดตัวแปรพร้อมหน่วย แยกเงื่อนไขจำนวนรวมและมูลค่ารวมเป็นคณะสมการ เช่น สินค้าสองชนิด ราคา p, q บาท ขาย x, y ชิ้น จะมีจำนวนรวม $x + y$ ชิ้น และมูลค่ารวม $px + qy$ บาท ถ้าตัวแปรแทนจำนวนชิ้นต้องเป็นจำนวนเต็มไม่ลบ

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.7

ร้านเช่าเล่มรับทำสมุดแบบปกอ่อนเล่มละ 90 บาท และแบบปกแข็งเล่มละ 150 บาท ในวันหนึ่งส่งมอบสมุดรวม 180 เล่ม คิดเป็นเงิน 20400 บาท จงหาว่าสมุดปกอ่อนมีมากกว่าสมุดปกแข็งกี่เล่ม

วิธีทำ

ให้ s เป็นจำนวนสมุดปกอ่อน และ h เป็นจำนวนสมุดปกแข็ง จะได้

$$s + h = 180, \quad 90s + 150h = 20400$$

คูณสมการแรกด้วย 90 แล้วลบออกจากสมการที่สอง

$$60h = 20400 - 16200 = 4200$$

จึงมี $h = 70$ และ $s = 180 - 70 = 110$ สมุดปกอ่อนมีมากกว่าสมุดปกแข็ง $110 - 70 = 40$ เล่ม

ตอบ 40 เล่ม

จำนวนและพีชคณิต

1.8 อัตราส่วนและร้อยละ

อัตราส่วนแสดงความสัมพันธ์เชิงคูณ ส่วนร้อยละคือสัดส่วนเทียบกับ 100 การคำนวณต้องระบุว่าเป็นปริมาณใดเป็นฐาน

อัตราส่วน ร้อยละ และการแปรผัน

$$x : y = a : b \implies x = ak, y = bk$$

ถ้า $x + y = T$ และ $a, b > 0$

$$x = \frac{aT}{a+b}, \quad y = \frac{bT}{a+b}$$

$$\text{ร้อยละ } p \text{ ของ } B = \frac{p}{100}B$$

$$\text{ค่าใหม่เมื่อเพิ่มหรือลด } p\% = B \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)$$

$$\text{ร้อยละการเปลี่ยนแปลง} = \frac{\text{ค่าใหม่} - B}{B} \times 100 \quad (B > 0)$$

$$\text{แปรผันตรง: } y = kx \quad \text{แปรผกผัน: } y = \frac{k}{x} \quad (x \neq 0)$$

แบ่งส่วนจากอัตราส่วน



การเปลี่ยนร้อยละหลายครั้งต้องคูณตัวคูณตามลำดับ เพราะฐานของแต่ละครั้งเปลี่ยนไป ส่วนการย้อนหาค่าเดิมให้หารด้วยตัวคูณรวมที่ไม่เป็นศูนย์

ตัวอย่าง อุปกรณ์ราคา 800 บาท ลดราคาครั้งแรก 15% แล้วลดจากราคาที่เหลืออีก 10%

วิธีทำ ราคาสุดท้ายเป็น $800(0.85)(0.90) = 612$ บาท คิดเป็นส่วนลดสุทธิ 23.5% ของราคาเดิม

กำไรและขาดทุน

กำไรเท่ากับราคาขายลบต้นทุน หากกำไร $p\%$ ของต้นทุน ราคาขายเท่ากับต้นทุนคูณ $1 + p/100$ หากใช้ราคาขายเป็นฐานต้องตั้งสัดส่วนใหม่ การแปรผันตรงมี y/x คงที่เมื่อ $x \neq 0$ ส่วนการแปรผกผันมี xy คงที่โดยหาค่าคงตัว k จากข้อมูลที่กำหนดก่อน

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.8

ช่างเตรียมกระเบื้องสีขาวและสีน้ำเงินไว้ในอัตราส่วน 9 : 7 เมื่อนำกระเบื้องแต่ละสีไปใช้สีละ 20 แผ่น อัตราส่วนของกระเบื้องสีขาวต่อสีน้ำเงินที่เหลือเป็น 7 : 5 เดิมมีกระเบื้องสีน้ำเงินกี่แผ่น

วิธีทำ

ให้จำนวนกระเบื้องเดิมเป็น $9k$ และ $7k$ แผ่น ตามลำดับ เงื่อนไขหลังนำไปใช้ให้

$$\frac{9k - 20}{7k - 20} = \frac{7}{5}$$

คูณไขว้ได้ $45k - 100 = 49k - 140$ จึงมี $k = 10$ กระเบื้องสีน้ำเงินเดิมมี $7(10) = 70$ แผ่น

ตอบ 70 แผ่น

จำนวนและพีชคณิต

1.9 อัตราเร็วและการเคลื่อนที่

ให้ s เป็นระยะทาง v เป็นอัตราเร็ว และ t เป็นเวลา โดยใช้หน่วยที่สอดคล้องกัน อัตราเร็วเฉลี่ยคำนวณจากการเดินทางทั้งหมด

ระยะทาง เวลา และอัตราเร็วเฉลี่ย

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t} \quad (t > 0), \quad t = \frac{s}{v} \quad (v > 0)$$

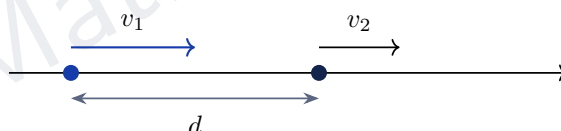
$$v_{\text{เฉลี่ย}} = \frac{s_1 + s_2 + \dots}{t_1 + t_2 + \dots}$$

เมื่ออัตราเร็วคงที่ และระยะทางเริ่มต้นเป็น d

$$t_{\text{เข้าหากัน}} = \frac{d}{v_1 + v_2}, \quad t_{\text{ตามทัน}} = \frac{d}{v_1 - v_2} \quad (v_1 > v_2)$$

เดินทางสองช่วงด้วยอัตราเร็ว $u, v > 0$

ระยะทางสองช่วงเท่ากัน	$v_{\text{เฉลี่ย}} = \frac{2uv}{u+v}$
เวลาสองช่วงเท่ากัน	$v_{\text{เฉลี่ย}} = \frac{u+v}{2}$



การตามทันใช้ผลต่างอัตราเร็ว เมื่อผู้เร็วยู้อยู่ด้านหลัง

ตัวอย่าง รถลำเลียงคันแรกออกด้วยอัตราเร็ว 2 เมตรต่อวินาที อีก 10 วินาทีต่อมา คันที่สองออกจากจุดเดียวกันด้วยอัตราเร็ว 3 เมตรต่อวินาทีตามแนวเดียวกัน

วิธีทำ ระยะนำของคันแรกเป็น $2(10) = 20$ เมตร คันที่สองตามทันในเวลา $20/(3-2) = 20$ วินาทีหลังจากออกเดินทาง

การแปลงหน่วย

1 ชั่วโมงเท่ากับ 60 นาที และ 1 เมตรต่อวินาทีเท่ากับ 3.6 กิโลเมตรต่อชั่วโมง หากมีช่วงหยุดพัก ให้นับเวลาหยุดในเวลารวมเมื่อหาอัตราเร็วเฉลี่ยตลอดการเดินทาง

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.9

รถขนส่งอัตโนมัติคันแรกออกจากจุดรับวัสดุด้วยอัตราเร็วคงที่ 4 เมตรต่อวินาที อีก 15 วินาทีต่อมา รถคันที่สองออกจากจุดเดียวกันและตามไปบนเส้นทางเดียวกันด้วยอัตราเร็วคงที่ 6 เมตรต่อวินาที รถทั้งสองเคลื่อนที่ต่อเนื่องในทิศเดียวกัน รถคันที่สองเดินทางกี่เมตรจึงตามทัน

วิธีทำ

เมื่อรถคันที่สองเริ่มเคลื่อนที่ คันแรกนำอยู่ $4(15) = 60$ เมตร ช่องว่างลดลงด้วยอัตราเร็วสัมพัทธ์

$$6 - 4 = 2 \text{ เมตรต่อวินาที}$$

เวลาที่คันที่สองใช้ตามทันคือ $60/2 = 30$ วินาที จึงเดินทางเป็นระยะ

$$s = 6(30) = 180 \text{ เมตร}$$

ตอบ 180 เมตร

จำนวนและพีชคณิต

1.10 ลำดับและผลรวม

เขียนลำดับเป็น $a_1, a_2, \dots$ โดย a_n คือพจน์ที่ n และ S_n คือผลรวม n พจน์แรก ต้องตรวจสอบความสัมพันธ์ของพจน์ก่อนเลือกใช้สูตร

ลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

เลขคณิตมีผลต่างคงที่ $d = a_{k+1} - a_k$

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

เรขาคณิตมี $a_{k+1} = ra_k$ โดย $r \neq 0$ คงที่

$$a_n = a_1 r^{n-1}, \quad S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

เมื่อ $r = 1$ มี $S_n = na_1$ โดยทุกสูตรใช้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ผลรวมมาตรฐาน

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง ลำดับ 5, 8, 11, 14, ... มีพจน์ที่ 12 และผลรวม 12 พจน์แรกเท่าใด

วิธีทำ ผลต่างร่วมคือ 3 จึงได้

$$a_{12} = 5 + 11(3) = 38, \quad S_{12} = \frac{12}{2}(5 + 38) = 258$$

การแปลงลำดับ

ถ้าส่วนกลับมีผลต่างคงที่ ให้กำหนด $b_n = 1/a_n$ แล้วใช้สูตรเลขคณิตกับ b_n โดยต้องมี $a_n \neq 0$ ทุกพจน์ที่เกี่ยวข้อง การเห็นเพียงไม่กี่พจน์ไม่ยืนยันแบบรูป ต้องใช้เงื่อนไขของโจทย์ประกอบ

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.10

กำหนดจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ $x_1, x_2, \dots, x_{18}$ โดยผลต่าง $\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k}$ มีค่าเท่ากันสำหรับทุก $k = 1, 2, \dots, 17$ ถ้า $x_1 = 3$ และ $x_{18} = \frac{6}{19}$ จงหาผลรวม

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_{18}}$$

วิธีทำ

ให้ $b_k = 1/x_k$ เงื่อนไขผลต่างคงที่ทำให้ $b_1, b_2, \dots, b_{18}$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี

$$b_1 = \frac{1}{3}, \quad b_{18} = \frac{19}{6}$$

ใช้สูตรผลรวมจากพจน์แรกและพจน์สุดท้าย

$$\sum_{k=1}^{18} \frac{1}{x_k} = \frac{18}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{19}{6} \right) = 9 \left(\frac{7}{2} \right) = \frac{63}{2}$$

ตอบ $\frac{63}{2}$

จำนวนและพีชคณิต

1.11 แบบรูปและการตัดทอน

การตัดทอนเกิดจากการจัดพจน์ให้ตัวกลางหักล้างกัน ควรเขียนพจน์ต้นและพจน์ท้ายให้เห็นขอบเขตของผลรวม

การตัดทอนและรอบซ้ำ

สำหรับจำนวนเต็มบวก k, n มี

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} = n+1$$

ถ้ารอบซ้ำมี L ตำแหน่ง ตำแหน่งที่ $N \geq 1$ ตรงกับลำดับในรอบ

$$1 + ((N-1) \bmod L)$$

ตารางเริ่มที่ a เลื่อนไปขวาเพิ่ม d และลงล่างเพิ่ม e มีค่าแถว i หลัก j

$$a_{i,j} = a + (i-1)e + (j-1)d$$

สัญลักษณ์ $\sum$ และ $\prod$ หมายถึงผลบวกและผลคูณของพจน์ตามช่วงที่ระบุ ส่วน $u \bmod L$ หมายถึงเศษจากการหารด้วย L

ตัวอย่าง หาผลรวม $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5}$

วิธีทำ แยกแต่ละพจน์เป็นผลต่าง แล้วตัดพจน์ที่ปรากฏด้วยเครื่องหมายตรงข้ามกัน

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

จำนวนและจำนวนเลขโดด

จำนวนเต็มบวกที่มี k หลักมี $9 \cdot 10^{k-1}$ จำนวน ใช้เลขโดดรวม $9k \cdot 10^{k-1}$ ตัว การนับช่วงจำนวนเต็มตั้งแต่ a ถึง b แบบรวมปลายมี $b - a + 1$ จำนวน

ลำดับเวียนเกิด

ลำดับ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ ต้องทราบค่าเริ่มต้น a_1 หากถามเศษ สามารถลดเศษในแต่ละขั้นได้

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.11

จงหาผลคูณ

$$\left(\frac{1}{4} - 1\right) \left(\frac{1}{5} + 1\right) \left(\frac{1}{6} - 1\right) \left(\frac{1}{7} + 1\right) \cdots \left(\frac{1}{40} - 1\right) \left(\frac{1}{41} + 1\right)$$

โดยตัวส่วนเพิ่มทีละหนึ่ง และใช้เครื่องหมายลบเมื่อตัวส่วนเป็นจำนวนคู่ ใช้เครื่องหมายบวกเมื่อตัวส่วนเป็นจำนวนคี่

วิธีทำ

จับคู่พจน์ที่มีตัวส่วน $2j$ กับ $2j + 1$ เมื่อ $j = 2, 3, \dots, 20$ แต่ละคู่มีค่า

$$\left(\frac{1}{2j} - 1\right) \left(\frac{1}{2j+1} + 1\right) = -\frac{2j-1}{2j+1} \cdot \frac{j+1}{j}$$

มีทั้งหมด 19 คู่อ ผลคูณจึงเป็น

$$(-1)^{19} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{39}{41}\right) \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{21}{20}\right)$$

ผลคูณในวงเล็บแรกตัดทอนเหลือ $3/41$ และวงเล็บที่สองเหลือ $21/2$ ดังนั้นผลคูณที่ต้องการเท่ากับ

$$-\frac{3}{41} \cdot \frac{21}{2} = -\frac{63}{82}$$

ตอบ $-\frac{63}{82}$

จำนวนและพีชคณิต

1.12 นิยามใหม่และเลขฐาน

การดำเนินการที่กำหนดขึ้นต้องใช้ตามนิยาม สมบัติการสลับที่หรือเปลี่ยนหมู่ไม่เกิดขึ้นโดยอัตโนมัติ ส่วนระบบเลขฐานใช้ค่าประจำหลักเป็นกำลังของฐาน

ค่าประจำหลักในฐาน b

เมื่อ $b \geq 2$ เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \leq d_i < b$ เป็นเลขโดด

$$(d_k d_{k-1} \cdots d_0)_b = \sum_{i=0}^k d_i b^i$$

สำหรับจำนวนสามหลัก

$$(uvw)_b = ub^2 + vb + w$$

จำนวนเต็มบวกที่มี k หลักในฐาน b มี $(b-1)b^{k-1}$ จำนวน

การแปลงฐาน

แปลงเป็นฐานสิบโดยรวมเลขโดดคูณค่าประจำหลัก แปลงจำนวนเต็มบวกฐานสิบเป็นฐาน b โดยหารด้วย b ซ้ำและอ่านเศษจากครั้งสุดท้ายย้อนขึ้นมา

เลขโดดของ $(1101)_2$	1	1	0	1
ค่าประจำหลัก	2^3	2^2	2^1	2^0
ค่าของแต่ละหลัก	8	4	0	1

ดังนั้น $(1101)_2 = 13$ ในฐานสิบ แต่ $(102)_2$ ไม่ใช่เลขฐานสองที่ถูกต้อง เพราะเลขโดดต้องน้อยกว่าฐาน

การใช้สัญลักษณ์ที่กำหนดขึ้น

ถ้า $a \star b = 3a + 2b$ จะมี $2 \star 5 = 16$ แต่ $5 \star 2 = 19$ จึงไม่สลับที่ การคำนวณหลายชั้นต้องทำตามวงเล็บ เช่น $(1 \star 2) \star 3 = 7 \star 3 = 27$

ตัวอย่าง กำหนด $(u+v) \diamond (u-v) = u^2 + v^2$ จงเขียน $a \diamond b$ ด้วย a, b

วิธีทำ จาก $u+v = a$ และ $u-v = b$ ได้ $u = (a+b)/2$ และ $v = (a-b)/2$ จึงมี

$$a \diamond b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

สูตรนี้ใช้สำหรับการดำเนินการตามนิยามข้างต้น

จำนวนและพีชคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 1.12

นิยามการดำเนินการ $\diamond$ บนจำนวนจริงด้วยเงื่อนไข

$$(u + v) \diamond (u - v) = u^2 + v^2$$

สำหรับจำนวนจริง u, v ทุกคู่ จงหาค่า $\sqrt{17 \diamond 7}$

วิธีทำ

ต้องการหาค่า $17 \diamond 7$ จึงกำหนด $u + v = 17$ และ $u - v = 7$ บวกและลบสมการได้

$$u = \frac{17 + 7}{2} = 12, \quad v = \frac{17 - 7}{2} = 5$$

แทนค่าในนิยาม

$$17 \diamond 7 = 12^2 + 5^2 = 169$$

ดังนั้น $\sqrt{17 \diamond 7} = \sqrt{169} = 13$

ตอบ 13

เรขาคณิต

2.1 มุม เส้นขนาน และรูปหลายเหลี่ยม

ขนาดมุมในบทนี้ใช้หน่วยองศา การหามุมต้องอ้างอิงสมบัติของเส้นตรง เส้นขนาน หรือรูปเรขาคณิตตามเงื่อนไขที่กำหนด

ผลรวมมุม

$$\text{มุมรอบจุด} = 360^\circ$$

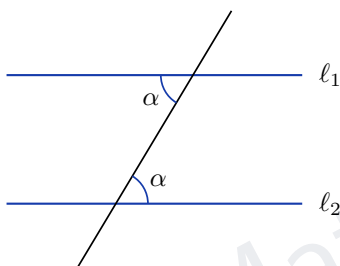
$$\text{มุมบนเส้นตรง} = 180^\circ$$

$$\text{มุมภายในสามเหลี่ยม} = 180^\circ$$

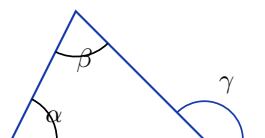
$$\text{มุมภายในรูป } n \text{ เหลี่ยม} = (n - 2)180^\circ$$

รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่มี $n \geq 3$ ด้าน

$$\text{มุมภายในแต่ละมุม} = \frac{(n - 2)180^\circ}{n}, \quad \text{มุมภายนอกแต่ละมุม} = \frac{360^\circ}{n}$$



$l_1 \parallel l_2$ ให้มุมแย้งภายในเท่ากัน



มุมภายนอก $\gamma = \alpha + \beta$

เส้นขนานกับเส้นตัด

เมื่อเส้นตรงสองเส้นขนานกัน มุมสมนัยเท่ากัน มุมแย้งภายในเท่ากัน และมุมภายในด้านเดียวของเส้นตัดรวม 180° ส่วนมุมตรงข้ามกันที่เกิดจากเส้นตรงตัดกันย่อมเท่ากัน

สามเหลี่ยมและการหมุน

สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีมุมที่ฐานเท่ากัน สามเหลี่ยมด้านเท่ามีมุมละ 60° สำหรับมุมทิศ ให้เหนือเป็น 0° ตะวันออก 90° ใต้ 180° และตะวันตก 270° เมื่อวัดตามเข็มนาฬิกา มุมต่างกัน 360° แทนทิศเดียวกัน

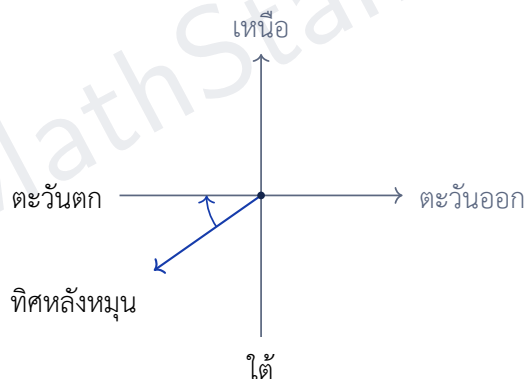
ตัวอย่าง ป้ายรูปแปดเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามีมุมภายในและมุมภายนอกเท่าใด

วิธีทำ มุมภายในแต่ละมุมเป็น $(8 - 2)180^\circ / 8 = 135^\circ$ ส่วนมุมภายนอกแต่ละมุมเป็น $360^\circ / 8 = 45^\circ$

เรขาคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 2.1

กล้องสำรวจเริ่มหันไปทางทิศตะวันออก จากนั้นหมุนทวนเข็มนาฬิกา 105° แล้วหมุนตามเข็มนาฬิกา 250° หากต้องการให้กล้องหันไปทางทิศตะวันตกโดยหมุนให้น้อยที่สุด จะต้องหมุนกี่องศาและในทิศทางใด



วิธีทำ

กำหนดมุมทิศโดยวัดจากทิศเหนือในทิศตามเข็มนาฬิกา ทิศตะวันออกมีมุมทิศ 90° หลังหมุนทั้งสองครั้ง มุมทิศของกล้องเป็น

$$90^\circ - 105^\circ + 250^\circ = 235^\circ$$

ทิศตะวันตกมีมุมทิศ 270° หากหมุนตามเข็มนาฬิกาจะใช้ $270^\circ - 235^\circ = 35^\circ$ ส่วนการหมุนทวนเข็มนาฬิกาจะใช้ $360^\circ - 35^\circ = 325^\circ$ จึงเลือกหมุนตามเข็มนาฬิกา

ตอบ 35° ตามเข็มนาฬิกา

เรขาคณิต

2.2 พีทาโกรัสและความยาว

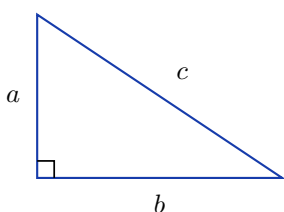
ทฤษฎีบทพีทาโกรัสใช้กับสามเหลี่ยมมุมฉาก ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด และต้องระบุให้ถูกก่อนแทนค่า

ด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

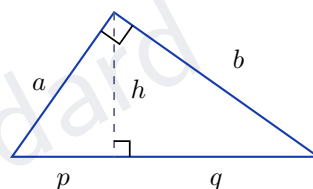
$$c^2 = a^2 + b^2, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ถ้าเส้นสูงจากยอดมุมฉากแบ่งด้านตรงข้ามเป็น p, q ตามรูป

$$c = p + q, \quad h^2 = pq, \quad a^2 = cp, \quad b^2 = cq, \quad h = \frac{ab}{c}$$



ด้าน a, b ประกอบมุมฉาก



a อยู่ติดส่วน p และ b อยู่ติดส่วน q

ความยาวที่ใช้บ่อย

ชุดด้านสามเหลี่ยมมุมฉาก ได้แก่ $(3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25)$ การคูณทุกด้านด้วยจำนวนบวกเดียวกันยังคงมุมฉาก ส่วนสี่เหลี่ยมจัตุรัสด้าน s มีเส้นทแยงมุม $s\sqrt{2}$

การตรวจนิสิตสามเหลี่ยม

สำหรับ $0 < a \leq b \leq c$ ต้องมี $a + b > c$ จึงเป็นสามเหลี่ยม เมื่อเป็นสามเหลี่ยมแล้ว เปรียบเทียบ c^2 กับ $a^2 + b^2$ ถ้าน้อยกว่า เท่ากัน หรือมากกว่า จะเป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม มุมฉาก หรือมุมป้าน ตามลำดับ

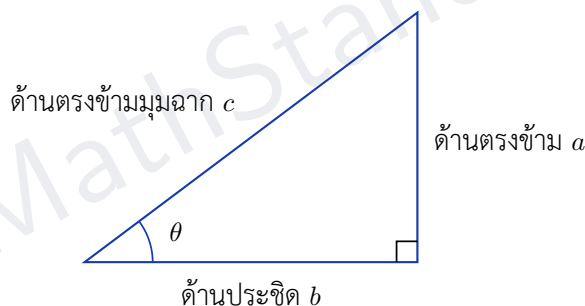
ตัวอย่าง กรอบภาพสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง 5 และยาว 12 เซนติเมตร มีเส้นทแยงมุมยาวเท่าใด

วิธีทำ เส้นทแยงมุมยาว $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ เซนติเมตร

เรขาคณิต 2.2

อัตราส่วนตรีโกณมิติในสามเหลี่ยมมุมฉาก

ให้ θ เป็นมุมแหลม ด้านตรงข้ามและด้านประชิดพิจารณาเทียบกับมุม θ ส่วนด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านเต็มเสมอ



อัตราส่วนพื้นฐาน

$$\sin \theta = \frac{a}{c}, \quad \cos \theta = \frac{b}{c}, \quad \tan \theta = \frac{a}{b}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

θ	30°	45°	60°
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

สัดส่วนด้านที่สัมพันธ์กับมุม

สามเหลี่ยมมุม $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ มีด้านตรงข้ามมุมตามลำดับเป็น $1 : \sqrt{3} : 2$ ส่วนสามเหลี่ยมมุม $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ มีสัดส่วนด้าน $1 : 1 : \sqrt{2}$

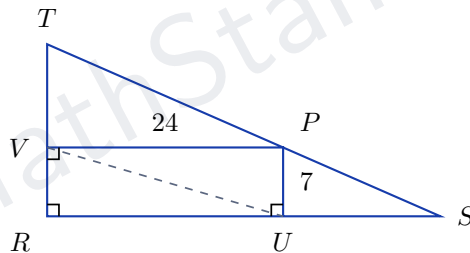
ตัวอย่าง เชือกยาว 8 เมตร ชิงจากพื้นถึงยอดเสาและทำมุม 30° กับพื้นราบ โดยเสาดังฉากกับพื้น

วิธีทำ ความสูงของเสาเป็น $8 \sin 30^\circ = 4$ เมตร และจุดยึดเชือกบนพื้นห่างจากโคนเสา $8 \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$ เมตร

เรขาคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 2.2

แผ่นป้ายรูปสามเหลี่ยม RST มีมุม R เป็นมุมฉาก จุด P อยู่บนด้าน ST ลาก PU ตั้งฉากกับ RS ที่ U และลาก PV ตั้งฉากกับ RT ที่ V ถ้า $PU = 7$ เซนติเมตร และ $PV = 24$ เซนติเมตร จงหาความยาว UV



วิธีทำ

จากเส้นตั้งฉากได้ $PU \parallel RT$ และ $PV \parallel RS$ จึงมี $RUPV$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ทำให้

$$RU = PV = 24, \quad RV = PU = 7$$

ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสกับสามเหลี่ยมมุมฉาก RUV

$$UV = \sqrt{RU^2 + RV^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$$

ตอบ 25 เซนติเมตร

เรขาคณิต

2.3 ความเท่ากันทุกประการและความคล้าย

รูปที่เท่ากันทุกประการมีรูปร่างและขนาดเท่ากัน ส่วนรูปคล้ายมีมุมสมนัยเท่ากันและด้านสมนัยเป็นสัดส่วนเดียวกัน การเขียนลำดับจุดยอดช่วยระบุคู่สมนัย

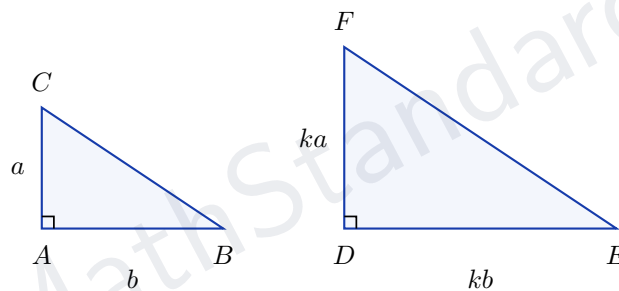
อัตราส่วนของรูปคล้าย

ถ้า $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ และรูปที่สองขยายจากรูปแรกด้วย $k > 0$

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = k$$

$$\frac{P_2}{P_1} = k, \quad \frac{A_2}{A_1} = k^2, \quad \frac{V_2}{V_1} = k^3$$

P คือเส้นรอบรูป A คือพื้นที่ และสูตร V ใช้กับรูปทรงสามมิติที่คล้ายกัน



$A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$ โดยด้านสมนัยเป็น k เท่า

เกณฑ์สำหรับสามเหลี่ยม

- **เท่ากันทุกประการ** ใช้ด้านสามคู่เท่ากัน หรือด้านสองคู่กับมุมระหว่างด้านเท่ากัน หรือมุมสองคู่กับด้านสมนัยหนึ่งคู่เท่ากัน สำหรับมุมฉากใช้ด้านตรงข้ามมุมฉากและด้านประกอบมุมฉากหนึ่งคู่เท่ากันได้
- **คล้ายกัน** ใช้มุมสองคู่เท่ากัน หรือด้านสามคู่เป็นสัดส่วนเดียวกัน หรือด้านสองคู่เป็นสัดส่วนเดียวกันพร้อมมุมระหว่างด้านเท่ากัน

ตัวอย่าง รูปคล้ายมีด้านสมนัยเป็นอัตราส่วน 3 : 4 ถ้ารูปเล็กมีพื้นที่ 27 ตารางหน่วย รูปใหญ่มีพื้นที่เท่าใด

วิธีทำ อัตราส่วนพื้นที่เป็น 9 : 16 รูปใหญ่จึงมีพื้นที่ $27(16/9) = 48$ ตารางหน่วย

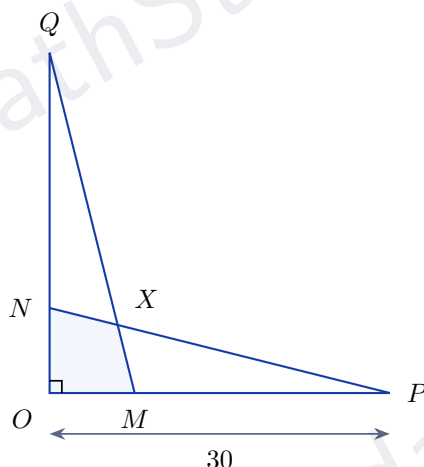
เส้นขนานในสามเหลี่ยม

ถ้า D อยู่บน AB , E อยู่บน AC และ $DE \parallel BC$ จะได้ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ จึงมี $AD/AB = AE/AC = DE/BC$ ต้องเทียบด้านของสามเหลี่ยมคู่เดียวกันตลอด

เรขาคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 2.3

ในรูป $\angle POQ = 90^\circ$ จุด M อยู่บน OP และจุด N อยู่บน OQ โดย $\triangle QOM \cong \triangle PON$ ตามลำดับจุดที่เขียน กำหนด $OP = 30$ เซนติเมตร และ $OM = \frac{1}{4}OP$ ถ้า X เป็นจุดตัดของ QM กับ PN จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยม $OMXN$



วิธีทำ

ความเท่ากันทุกประการให้ $OQ = OP = 30$ และ $ON = OM = 30/4 = 15/2$ ลากเส้นตั้งฉากจาก X ลงบน OP ให้ระยะจาก O ถึงจุดตัดของเส้นตั้งฉากกับ OP เป็น x และความสูงเป็น y ความคล้ายของสามเหลี่ยมมุมฉากที่เกิดจากเส้น QM และ PN ให้

$$y = 30 - 4x, \quad y = \frac{30 - x}{4}$$

ดังนั้น $120 - 16x = 30 - x$ จึงมี $x = 6$ และ $y = 6$ แบ่งสี่เหลี่ยมตามเส้น OX เป็นสามเหลี่ยมสองรูปได้พื้นที่รวม

$$\frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} \right) (6) + \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} \right) (6) = 45$$

ตอบ 45 ตารางเซนติเมตร

เรขาคณิต

2.4 พื้นที่ของรูปเรขาคณิต

ให้ A แทนพื้นที่ ความสูง h ต้องตั้งฉากกับฐานที่ใช้ในสูตร หน่วยพื้นที่เป็นตารางหน่วย

สูตรพื้นที่พื้นฐาน

$$\text{สี่เหลี่ยมจัตุรัส} : A = s^2$$

$$\text{สี่เหลี่ยมผืนผ้า} : A = ab$$

$$\text{สามเหลี่ยม} : A = \frac{1}{2}bh$$

$$\text{สี่เหลี่ยมด้านขนาน} : A = bh$$

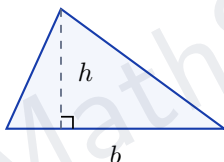
$$\text{สี่เหลี่ยมคางหมู} : A = \frac{1}{2}(a+b)h$$

$$\text{สามเหลี่ยมด้านเท่า} : A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

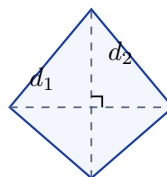
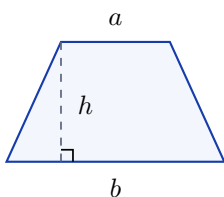
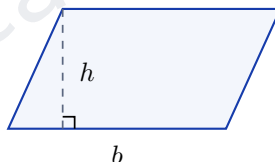
$$\text{รูปว่าวหรือขนมเปียกปูน} : A = \frac{1}{2}d_1d_2$$

ในสูตรคางหมู a, b เป็นด้านคู่ขนาน ส่วน d_1, d_2 เป็นเส้นทแยงมุมที่ตั้งฉากกัน

สามเหลี่ยม



สี่เหลี่ยมด้านขนาน



เส้นประแสดงความสูงตั้งฉาก หรือเส้นทแยงมุมที่ใช้ในสูตร

เปรียบเทียบและรวมพื้นที่

สามเหลี่ยมที่สูงเท่ากันมีอัตราส่วนพื้นที่ที่เท่ากับอัตราส่วนฐาน ถ้าฐานเท่ากันให้เทียบความสูง พื้นที่รวมใช้ $A(U \cup V) = A(U) + A(V) - A(U \cap V)$ ส่วนพื้นที่ที่อยู่ในเพียงรูปใดรูปหนึ่งใช้ $A(U) + A(V) - 2A(U \cap V)$

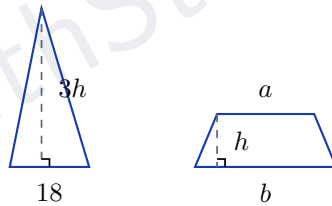
ตัวอย่าง แปลงสามเหลี่ยมพื้นที่ 42 ตารางเมตร มีเส้นจากยอดแบ่งฐานในอัตราส่วน 3 : 4

วิธีทำ สามเหลี่ยมย่อยมีความสูงเดียวกัน พื้นที่จึงเป็นอัตราส่วน 3 : 4 ส่วนที่มีฐานสั้นมีพื้นที่ $42(3/7) = 18$ ตารางเมตร

เรขาคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 2.4

แปลงทดลองรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมคางหมูมีพื้นที่เท่ากัน สามเหลี่ยมมีฐานยาว 18 เมตร และมีความสูงเป็น 3 เท่าของความสูงคางหมู ถ้าด้านที่ไม่ขนานกันสองด้านของคางหมวยาวรวม 26 เมตร จงหาความยาวรอบรูปคางหมู



วิธีทำ

ให้คางหมูสูง $h > 0$ และมีด้านคู่ขนานยาว a, b เมตร สามเหลี่ยมจึงสูง $3h$ เมตร ความเท่ากันของพื้นที่ให้

$$\frac{1}{2}(18)(3h) = \frac{1}{2}(a+b)h$$

หารด้วย $h/2$ ได้ $a+b = 54$ ความยาวรอบรูปคางหมูจึงเป็น $54 + 26 = 80$ เมตร

ตอบ 80 เมตร

เรขาคณิต

2.5 วงกลมและภาควงกลม

ให้ $r > 0$ เป็นรัศมี $d = 2r$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของภาควงกลม โดยวัดเป็นองศา

เส้นรอบวง ส่วนโค้ง และพื้นที่

$$\begin{aligned} C &= 2\pi r = \pi d \\ L_{\text{ส่วนโค้ง}} &= \frac{\theta}{360^\circ} 2\pi r \\ A_{\text{วงกลม}} &= \pi r^2 \\ A_{\text{ภาควงกลม}} &= \frac{\theta}{360^\circ} \pi r^2 \end{aligned}$$

สำหรับภาควงกลมที่ $0 < \theta < 360^\circ$

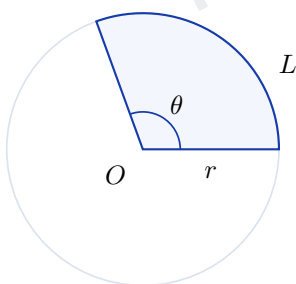
$$P_{\text{ภาควงกลม}} = 2r + L_{\text{ส่วนโค้ง}}$$

วงแหวนรัศมีนอก R และรัศมีใน r เมื่อ $R > r > 0$

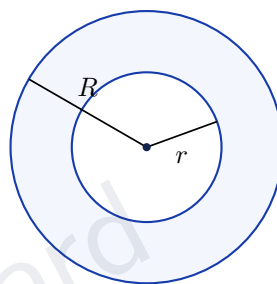
$$A_{\text{วงแหวน}} = \pi(R^2 - r^2)$$

โดย C คือความยาวเส้นรอบวง L คือความยาวส่วนโค้ง P คือความยาวรอบรูป และ A คือพื้นที่ของบริเวณที่ระบุ

C, L, P มีหน่วยเป็นหน่วยความยาว ส่วน A มีหน่วยเป็นตารางหน่วย



ภาควงกลมมีขอบเป็นรัศมีสองเส้นและส่วนโค้ง



วงแหวนเป็นพื้นที่ว่างกลมใหญ่ลบวงกลมเล็ก

ตัวอย่าง ภาควงกลมรัศมี 9 หน่วย มีมุมที่จุดศูนย์กลาง 80°

วิธีทำ ส่วนโค้งยาว $(80/360)2\pi(9) = 4\pi$ หน่วย พื้นที่เป็น $(80/360)\pi(9^2) = 18\pi$ ตารางหน่วย และเส้นรอบรูปเป็น $18 + 4\pi$ หน่วย

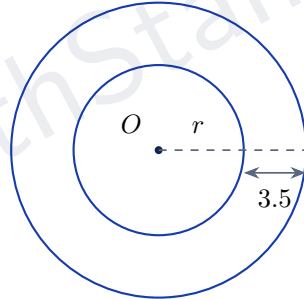
การหาพื้นที่ส่วนของวงกลม

สำหรับส่วนของวงกลมที่ถูกตัดด้วยคอร์ดและใช้มุมศูนย์กลางไม่เกิน 180° พื้นที่ส่วนเล็กเท่ากับพื้นที่ภาควงกลมลบพื้นที่สามเหลี่ยมที่เกิดจากรัศมีสองเส้นและคอร์ด

เรขาคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 2.5

สวนสาธารณะมีทางเดินวงกลมสองแนวที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน แนวด้านนอกอยู่ห่างจากแนวด้านในตามแนวรัศมี 3.5 เมตร จงหาผลต่างของระยะทางเมื่อเดินครบหนึ่งรอบตามแต่ละแนว โดยตอบในรูปที่มี π



วิธีทำ

ให้รัศมีแนวนอกเป็น R และรัศมีแนวในเป็น r จะได้ $R - r = 3.5$ เมตร ระยะทางครบหนึ่งรอบคือความยาวเส้นรอบวง ดังนั้นผลต่างเป็น

$$2\pi R - 2\pi r = 2\pi(R - r) = 2\pi(3.5) = 7\pi$$

ตอบ 7π เมตร

เรขาคณิต

2.6 มุม คอร์ด และเส้นสัมผัส

มุมบนเส้นรอบวงพิจารณาจากส่วนโค้งที่รองรับและไม่ผ่านจุดยอดของมุม ต้องระบุส่วนโค้งให้ตรงกันก่อนใช้ทฤษฎีบท

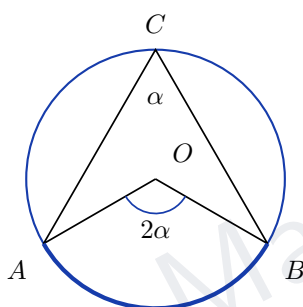
ทฤษฎีบทมุมของวงกลม

มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2(มุมบนเส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้งเดียวกัน)

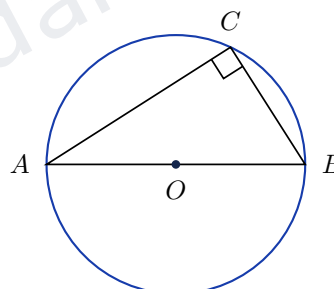
มุมในครึ่งวงกลม = 90°

ถ้า $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม เรียงจุดรอบวงตามลำดับ

$$\angle A + \angle C = 180^\circ, \quad \angle B + \angle D = 180^\circ$$



มุมทั้งสองรองรับส่วนโค้ง AB ด้านล่าง



AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จึงมี $\angle ACB = 90^\circ$

มุมในส่วนโค้งเดียวกันและมุมเส้นสัมผัส

มุมบนเส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดเท่ากัน ส่วนมุมระหว่างเส้นสัมผัสกับคอร์ดเท่ากับมุมบนเส้นรอบวงในส่วนโค้งตรงข้ามที่รองรับคอร์ดนั้น

ตัวอย่าง มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาด 124° จงหามุมบนเส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้งเดียวกัน

วิธีทำ มุมบนเส้นรอบวงมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่ง จึงเท่ากับ $124^\circ/2 = 62^\circ$

เรขาคณิต 2.6

คอร์ดและความยาวเส้นสัมผัส

รัศมีที่ตั้งฉากกับคอร์ดแบ่งคอร์ดเป็นสองส่วนเท่ากัน และรัศมีที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุดสัมผัส

ความสัมพันธ์ของความยาว

คอร์ดยาว L อยู่ห่างศูนย์กลางเป็นระยะตั้งฉาก d ในวงกลมรัศมี r

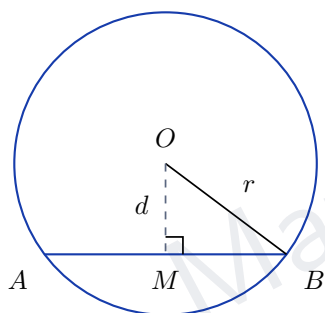
$$r^2 = d^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2, \quad L = 2\sqrt{r^2 - d^2} \quad (0 \leq d < r)$$

เส้นสัมผัสจากจุดภายนอก P สัมผัสวงกลมที่ T และ U

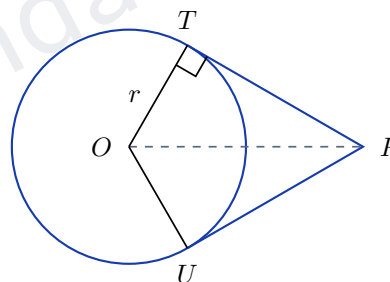
$$PT = PU, \quad PT^2 = OP^2 - r^2$$

ถ้าเส้นตัดจาก P พบบวงกลมที่ A ก่อน B จะมี

$$PT^2 = PA \cdot PB$$



$$AM = MB = L/2$$



เส้นสัมผัสสองเส้นจาก P ยาวเท่ากัน

ตัวอย่าง วงกลมรัศมี 10 เซนติเมตร มีคอร์ดห่างจากศูนย์กลาง 6 เซนติเมตร

วิธีทำ ครึ่งคอร์ดยาว $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ เซนติเมตร คอร์ดจึงยาว 16 เซนติเมตร

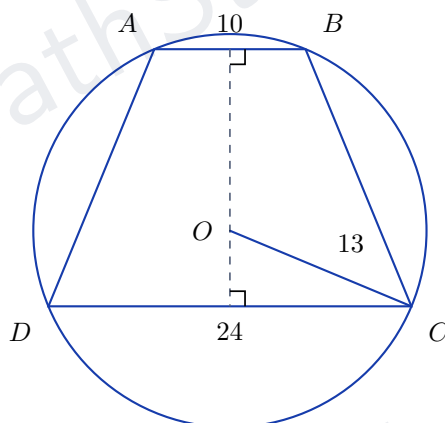
คอร์ดขนาน

คอร์ดที่ยาวเท่ากันอยู่ห่างศูนย์กลางเท่ากัน ถ้าคอร์ดขนานอยู่คนละด้านของศูนย์กลาง ระยะห่างระหว่างคอร์ดเป็นผลบวกของระยะตั้งฉาก แต่ถ้าอยู่ด้านเดียวกันให้ใช้ผลต่าง

เรขาคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 2.6

ช่างออกแบบลวดลายสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ภายในกรอบวงกลมรัศมี 13 เซนติเมตร โดยจุดยอดทั้งสี่อยู่บนวงกลม ด้านคู่ขนาน AB และ CD ยาว 10 และ 24 เซนติเมตร และอยู่คนละด้านของจุดศูนย์กลาง ถ้าความยาวรอบรูปเขียนเป็น $a + b\sqrt{2}$ เซนติเมตร โดย a, b เป็นจำนวนเต็มบวก จงหาค่า $a + b$



วิธีทำ

เส้นตั้งฉากจากจุดศูนย์กลางแบ่งครึ่งแต่ละเส้นเป็นสองส่วนเท่ากัน ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงฐานยาว 10 และ 24 เซนติเมตรจึงเป็น

$$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12, \quad \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

ฐานอยู่คนละด้านของศูนย์กลาง ความสูงคางหมูจึงเป็น $12 + 5 = 17$ เซนติเมตร ระยะแนวขนานของด้านเอียงแต่ละด้านเท่ากับ $12 - 5 = 7$ เซนติเมตร ดังนั้นด้านเอียงยาว

$$\sqrt{7^2 + 17^2} = \sqrt{338} = 13\sqrt{2}$$

รอบรูปยาว $10 + 24 + 2(13\sqrt{2}) = 34 + 26\sqrt{2}$ จึงได้ $a + b = 34 + 26 = 60$

ตอบ 60

เรขาคณิต

2.7 พิกัดและการแปลงรูป

พิกัด (x, y) ระบุตำแหน่งในระนาบ การใช้สูตรต้องคงลำดับพิกัดและเครื่องหมายให้ถูกต้อง

ระยะทาง จุดกึ่งกลาง และจุดแบ่งภายใน

เมื่อ $A = (x_1, y_1)$ และ $B = (x_2, y_2)$

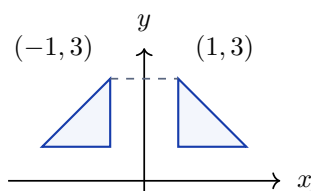
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

ถ้า $AP : PB = m : n$ และ $m, n > 0$ แล้ว

$$P = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m + n}, \frac{ny_1 + my_2}{m + n} \right)$$

การแปลงจุด (x, y)	พิกัดภาพ
เลื่อนขนานด้วย (u, v)	$(x + u, y + v)$
สะท้อนผ่านแกน x หรือแกน y	$(x, -y)$ หรือ $(-x, y)$
สะท้อนผ่านเส้น $y = x$	(y, x)
หมุนรอบจุดกำเนิดทวนเข็มนาฬิกา 90°	$(-y, x)$
หมุนรอบจุดกำเนิดตามเข็มนาฬิกา 90°	$(y, -x)$
หมุนรอบจุดกำเนิด 180°	$(-x, -y)$



สะท้อนผ่านแกน y เปลี่ยนเครื่องหมายพิกัดแรกและรักษาระยะ

พื้นที่จากพิกัด

จุดยอด (x_i, y_i) ต้องเรียงรอบรูปหลายเหลี่ยมอย่างง่าย และให้จุดที่ $n + 1$ เป็นจุดแรก

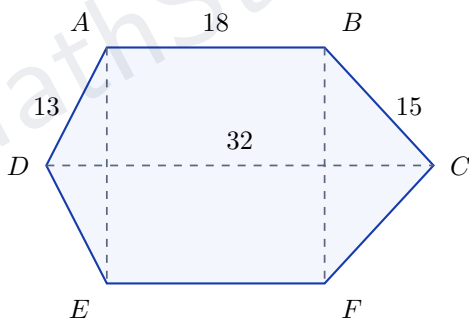
$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^n y_i x_{i+1} \right|$$

รอยพับเป็นเส้นตั้งฉากแบ่งครึ่งระหว่างจุดเดิมกับภาพสะท้อน ทุกจุดบนรอยพับอยู่ห่างจากสองจุดนั้นเท่ากัน

เรขาคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 2.7

ลวดลายบนแผ่นกระจกเริ่มจากสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ซึ่งมี $AB \parallel CD$, $AB = 18$, $CD = 32$, $AD = 13$ และ $BC = 15$ เซนติเมตร เมื่อลากเส้นตั้งฉากจาก A และ B ไปตัดเส้น CD จุดตัดทั้งสองอยู่ในด้าน CD สะท้อน A, B ผ่านเส้น CD ได้ E, F ตามลำดับ จงหาพื้นที่หกเหลี่ยม $ABCFED$



วิธีทำ

ให้ความสูงคางหมูเป็น h และส่วนเกินฐานทางซ้ายกับขวาเป็น p, q ตามลำดับ จะมี

$$p + q = 32 - 18 = 14, \quad p^2 + h^2 = 13^2, \quad q^2 + h^2 = 15^2$$

ลบสองสมการหลัง ได้ $(q - p)(q + p) = 225 - 169 = 56$ จึงมี $q - p = 4$ แก้วร่วมกับ $p + q = 14$ ได้ $p = 5, q = 9$ และ

$$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

ภาพสะท้อนมีพื้นที่เท่ากับรูปเดิมและอยู่คนละด้านของ CD พื้นที่หกเหลี่ยมจึงเป็น

$$2 \left[\frac{1}{2} (18 + 32)(12) \right] = 600$$

ตอบ 600 ตารางเซนติเมตร

เรขาคณิต

2.8 ปริมาตรของรูปทรง

ให้ V เป็นปริมาตร B เป็นพื้นที่ฐาน และ h เป็นความสูงตั้งฉาก ส่วน r เป็นรัศมี หน่วยปริมาตรเป็นลูกบาศก์หน่วย

สูตรปริมาตร

ปริซึม : $V = Bh$

ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก : $V = abh$

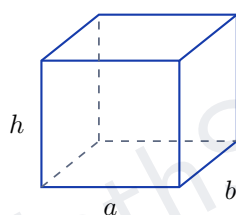
ทรงกระบอก : $V = \pi r^2 h$

พีระมิด : $V = \frac{1}{3}Bh$

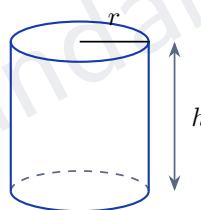
กรวย : $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

ทรงกลม : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

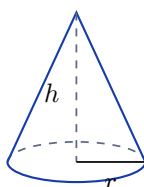
ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก



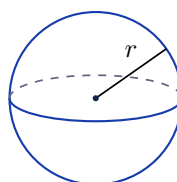
ทรงกระบอก



กรวย



ทรงกลม



การเปรียบเทียบและรูปทรงประกอบ

กรวยกับทรงกระบอกที่มีพื้นที่ฐานและความสูงเท่ากันมีปริมาตรเป็น 1 : 3 เช่นเดียวกับพีระมิดกับปริซึม รูปทรงประกอบใช้ผลรวมปริมาตรส่วนที่ไม่ทับกัน และหักส่วนที่เจาะออก

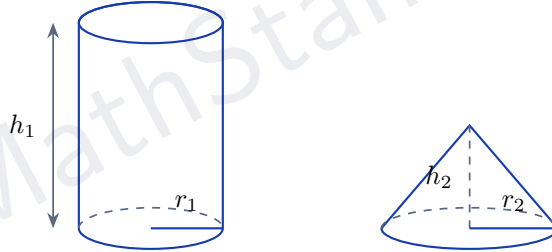
ตัวอย่าง กรวยรัศมีฐาน 4 หน่วย สูง 9 หน่วย มีปริมาตรเท่าใด

วิธีทำ ปริมาตรเป็น $\frac{1}{3}\pi(4^2)(9) = 48\pi$ ลูกบาศก์หน่วย ถ้าขยายทุกความยาวเป็น 3 เท่า ปริมาตรจะเป็น $3^3 = 27$ เท่า

เรขาคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 2.8

ภาชนะทรงกระบอกรัศมีฐาน r_1 สูง h_1 มีความจุเป็น 4 เท่าของภาชนะทรงกรวยรัศมีฐาน r_2 สูง h_2 ถ้า $h_1 = 2h_2$ และความยาวทุกค่าเป็นบวก จงหาอัตราส่วน r_2/r_1



วิธีทำ

จากสูตรปริมาตรและเงื่อนไขความจุ ได้

$$\pi r_1^2 h_1 = 4 \left(\frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2 \right)$$

แทน $h_1 = 2h_2$ แล้วหารด้วย πh_2 ซึ่งเป็นบวก

$$2r_1^2 = \frac{4}{3}r_2^2 \implies \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{3}{2}$$

รัศมีเป็นบวก จึงได้ $r_2/r_1 = \sqrt{3/2} = \sqrt{6}/2$

ตอบ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

เรขาคณิต

2.9 พื้นที่ผิวและหน่วยวัด

ให้ S เป็นพื้นที่ผิวทั้งหมดของรูปทรงปิด B เป็นพื้นที่ฐาน P เป็นเส้นรอบรูปฐาน และ ℓ เป็นความสูงเอียง

สูตรพื้นที่ผิวของรูปทรงปิด

ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก : $S = 2(ab + ah + bh)$

ปริซึมตรง : $S = Ph + 2B$

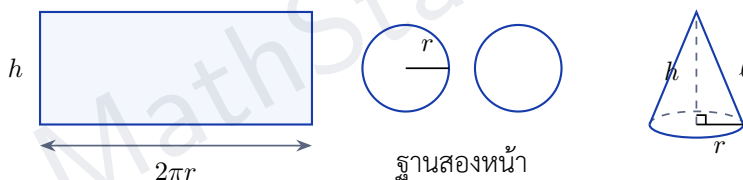
ทรงกระบอกตรง : $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

พีระมิดฐานปกติ : $S = \frac{1}{2}P\ell + B$

กรวยตรง : $S = \pi r\ell + \pi r^2, \quad \ell = \sqrt{r^2 + h^2}$

ทรงกลม : $S = 4\pi r^2$

พีระมิดฐานปกติในที่นี้มียอดอยู่เหนือศูนย์กลางฐานและหน้าข้างมีความสูงเอียงเท่ากัน



ซ้าย: รูปสี่เหลี่ยมทรงกระบอก ขวา: กรวยตรงมี $\ell^2 = r^2 + h^2$

นับเฉพาะผิวที่ต้องการ

กล่องเปิดฝานับฐานหนึ่งหน้าและผนังสี่หน้า ครึ่งทรงกลมมีผิวโค้ง $2\pi r^2$ และมีพื้นที่รวมฐาน $3\pi r^2$ ส่วนผิวที่ประกบกันอยู่ภายในรูปทรงไม่ใช่ผิวยานนอก

ตัวอย่าง ถาดเปิดฝาทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากกว้าง 4 ยาว 6 สูง 3 เซนติเมตร ต้องใช้วัสดุพื้นที่เท่าใด

วิธีทำ เมื่อไม่คิดรอยต่อ พื้นที่วัสดุเป็น $4(6) + 2(4)(3) + 2(6)(3) = 84$ ตารางเซนติเมตร

หน่วยวัดและอัตราการไหล

$$1 \text{ m}^2 = 10^4 \text{ cm}^2, \quad 1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ ลิตร}$$

1 ลิตรเท่ากับ 1000 cm^3 หากอัตราการไหลคงที่เป็น $Q > 0$ จะใช้เวลา $t = V/Q$ โดยใช้หน่วยปริมาตรและเวลาให้สอดคล้องกัน

เรขาคณิต

ตัวอย่างประยุกต์ 2.9

กล่องเก็บอุปกรณ์ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากปิดครบหกหน้า กว้าง 12 ยาว 20 และสูง 5 เซนติเมตร แบบใหม่เพิ่มความกว้าง 25% ลดความยาว 20% และเพิ่มความสูง 20% พื้นที่ผิวทั้งหมดของกล่องแบบใหม่เพิ่มขึ้นหรือลดลงจากเดิมกี่เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ

พื้นที่ผิวเดิมเท่ากับ

$$S_0 = 2(12 \cdot 20 + 12 \cdot 5 + 20 \cdot 5) = 800$$

ขนาดใหม่เป็น $12(1.25) = 15$, $20(0.80) = 16$ และ $5(1.20) = 6$ เซนติเมตร จึงมีพื้นที่ผิว

$$S_1 = 2(15 \cdot 16 + 15 \cdot 6 + 16 \cdot 6) = 852$$

พื้นที่ผิวเพิ่มขึ้น $852 - 800 = 52$ ตารางเซนติเมตร คิดเป็น

$$\frac{52}{800} \times 100 = 6.5\%$$

ตอบ เพิ่มขึ้น 6.5%

การนับและความน่าจะเป็น

3.1 หลักการนับเบื้องต้น

กำหนดก่อนว่าผลลัพธ์ใดถือว่าต่างกัน ลำดับมีความสำคัญหรือไม่ และใช้สิ่งเดิมซ้ำได้หรือไม่ แล้วจึงแยกการนับเป็นกรณีหรือขั้นตอน

หลักการบวกและหลักการคูณ

กรณีที่ไม่ทับกันและเลือกเพียงหนึ่งกรณี

$$N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

งานต่อเนื่อง k ขั้นตอน โดยแต่ละทางเลือกก่อนหน้ามีจำนวนทางเลือกขั้นถัดไปเท่ากัน

$$N = n_1 n_2 \cdots n_k$$

เซตจำกัดที่อาจทับกัน

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \quad |A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

สัญลักษณ์ $|A|$ คือจำนวนสมาชิกของเซต A ส่วน $A \cap B$ เป็นส่วนร่วม และ $A \setminus B$ เป็นสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B



ตัวอย่าง ร้านมีขนมปัง 3 ชนิดและเครื่องดื่ม 4 ชนิด ต้องการจัดชุดอย่างละหนึ่ง

วิธีทำ ขนมปังแต่ละชนิดเลือกคู่เครื่องดื่มได้ 4 แบบ จึงจัดชุดได้ $3 \cdot 4 = 12$ แบบ

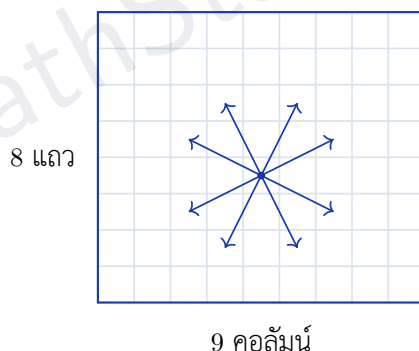
การแยกกรณี

หากจำนวนทางเลือกขั้นถัดไปขึ้นกับสิ่งที่เลือกก่อนหน้า ให้คูณภายในแต่ละกรณีแล้วนำมาบวก เช่น กรณีแรกมี $2 \cdot 3$ วิธี กรณีที่สองมี $1 \cdot 4$ วิธี และไม่ทับกัน จะมีทั้งหมด 10 วิธี หลักการคูณเป็นกฎการนับ ไม่จำเป็นต้องเป็นเหตุการณ์สุ่มอิสระ

การนับและความน่าจะเป็น

ตัวอย่างประยุกต์ 3.1

แผนผังแปลงเพาะชำแบ่งเป็นตาราง 8 แถว 9 คอลัมน์ เครื่องตรวจเคลื่อนจากกึ่งกลางช่องหนึ่งไปยังอีกช่องหนึ่ง โดยเปลี่ยนตำแหน่ง 2 ช่องในแนวหนึ่งและ 1 ช่องในแนวตั้งฉาก เลือกได้ทั้งแปดทิศดังรูป มีช่องเริ่มต้นที่ช่องที่ทำให้ตำแหน่งปลายทางทั้งแปดยังอยู่ในแปลง



วิธีทำ

ช่องเริ่มต้นต้องอยู่ห่างจากขอบแต่ละด้านอย่างน้อยสองช่อง จึงใช้ได้ตั้งแต่แถวที่ 3 ถึงแถวที่ 6 รวม 4 แถว และตั้งแต่คอลัมน์ที่ 3 ถึงคอลัมน์ที่ 7 รวม 5 คอลัมน์

$$(8 - 2 - 2)(9 - 2 - 2) = 4 \cdot 5 = 20$$

ทุกช่องในบริเวณนี้เคลื่อนได้ครบแปดทิศ ส่วนช่องภายนอกบริเวณจะมีอย่างน้อยหนึ่งทิศออกนอกแปลง

ตอบ 20 ช่อง

การนับและความน่าจะเป็น

3.2 การเรียงและการเลือก

การเรียงสนใจตำแหน่งหรือลำดับ ส่วนการเลือกสนใจเพียงสมาชิกของกลุ่ม นิยาม $n! = n(n-1) \cdots 1$ เมื่อ $n \geq 1$ และกำหนด $0! = 1$

สูตรการเรียงและการเลือก

เมื่อ n, r เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \leq r \leq n$ โดยสิ่งของต่างกันและไม่เลือกซ้ำ

เรียงทั้งหมด n สิ่ง : $n!$

เลือกมาเรียง r สิ่ง : ${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

เลือก r สิ่ง ไม่สนลำดับ : $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

เลือกเป็นคู่ : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

$${}_nP_r = r! \binom{n}{r}, \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$



หนึ่งกลุ่มที่มีสองสมาชิกให้ลำดับได้ $2!$ แบบ

ตัวอย่าง ชมรมมิอาสาสมัคร 6 คน ต้องเลือกผู้แทน 2 คน หรือเลือกหัวหน้ากับผู้ช่วยอย่างละหนึ่งคน

วิธีทำ ผู้แทนไม่มีตำแหน่งแยก จึงเลือกได้ $\binom{6}{2} = 15$ วิธี ส่วนหัวหน้ากับผู้ช่วยมีหน้าที่ต่างกัน จึงเลือกได้ $6 \cdot 5 = 30$ วิธี

การประยุกต์กับเรขาคณิต

เส้นตรงต่างกัน n เส้นมีจุดตัดต่างกันได้มากที่สุด $\binom{n}{2}$ จุด เมื่อไม่มีเส้นคู่ใดขนานกันและไม่มีสามเส้นผ่านจุดเดียวกัน ส่วนรูปหลายเหลี่ยมมุม n ด้านมีเส้นทแยงมุม $\binom{n}{2} - n = n(n-3)/2$ เส้น

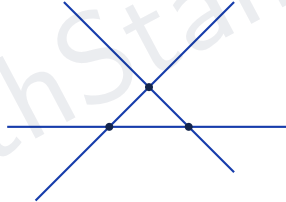
สิ่งของซ้ำ

การเรียงสิ่งของ n สิ่งที่มีชนิดเหมือนกันจำนวน $n_1, \dots, n_k$ โดยผลรวมเป็น n มี $n!/(n_1! \cdots n_k!)$ วิธี เพราะการสลับสิ่งของภายในชนิดเดียวกันไม่ให้ผลลัพธ์ใหม่

การนับและความน่าจะเป็น

ตัวอย่างประยุกต์ 3.2

นักออกแบบลากเส้นตรงที่แตกต่างกัน 18 เส้นบนระนาบเพื่อสร้างลวดลาย จงหาจำนวนจุดตัดที่แตกต่างกันมากที่สุด พร้อมระบุเงื่อนไขการวางเส้นที่ทำให้ได้จำนวนดังกล่าว



วิธีทำ

เส้นตรงสองเส้นมีจุดตัดได้ไม่เกินหนึ่งจุด จำนวนคู่ของเส้นตรงทั้งหมดคือ

$$\binom{18}{2} = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153$$

จึงมีจุดตัดได้ไม่เกิน 153 จุด และทำให้ถึงค่านี้ได้เมื่อไม่มีเส้นคู่ใดขนานกัน และไม่มีเส้นตั้งแต่สามเส้นขึ้นไปผ่านจุดเดียวกัน

ตอบ 153 จุด โดยไม่มีเส้นคู่ขนานและไม่มีสามเส้นผ่านจุดเดียวกัน

การนับและความน่าจะเป็น

3.3 การนับภายใต้เงื่อนไข

เริ่มนับจากตำแหน่งที่ถูกจำกัดมาก หรือแยกเป็นกรณีที่ไม่ทับกัน คำว่า “อย่างน้อยหนึ่ง” มักใช้การนับทั้งหมดลบกรณีที่ไม่มีเลย

รูปแบบการนับที่ใช้บ่อย

สตริงยาว n ตำแหน่ง แต่ละตำแหน่งเลือกได้ c สัญลักษณ์และใช้ซ้ำได้

$$N = c^n$$

สตริง 0,1 ยาว $n \geq 1$ ที่มีเลข 1 อย่างน้อยหนึ่งตัว

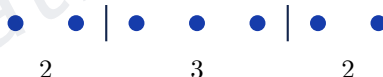
$$N = 2^n - 1$$

เรียงสีเป็นแถว $n \geq 3$ ตำแหน่ง มี $c \geq 3$ สี และทุกสามตำแหน่งติดกันต่างสีกัน

$$N = c(c-1)(c-2)^{n-2}$$

แบ่ง N หน่วยเหมือนกันเป็น r ส่วนจำนวนเต็มบวกที่มีลำดับ เมื่อ $N \geq r \geq 1$

$$x_1 + \cdots + x_r = N, \quad x_i \geq 1 \implies \binom{N-1}{r-1} \text{ วิธี}$$



เลือกช่องคันสองช่อง แบ่ง 7 หน่วยเป็นสามส่วน $2 + 3 + 2$

ตัวอย่าง แผงสวิตช์ 5 ตัว แต่ละตัวเปิดหรือปิดได้ ต้องการสถานะที่มีสวิตช์เปิดอย่างน้อยหนึ่งตัว

วิธีทำ สถานะทั้งหมดมี $2^5 = 32$ แบบ ตัดกรณีปิดทุกตัวหนึ่งแบบ จึงเหลือ 31 แบบ

เงื่อนไขที่เปลี่ยนวิธีนับ

รหัสอาจขึ้นต้นด้วย 0 ได้ แต่จำนวนหลายหลักขึ้นต้นด้วย 0 ไม่ได้ การเรียงแถวแยกปลายซ้ายขวาออกจากกัน ส่วนการเรียงเป็นวงหรือถือว่ากลับด้านแล้วเหมือนเดิมต้องวิเคราะห์ใหม่ การเลือกเหรียญชนิดเดียวกันหลายเหรียญให้ตั้งสมการมูลค่าและนับจำนวนเหรียญแต่ละชนิด ไม่ใช่แฟกทอเรียลโดยอัตโนมัติ

การนับและความน่าจะเป็น

ตัวอย่างประยุกต์ 3.3

นิทรรศการจัดแผ่นภาพ 5 ตำแหน่งเรียงจากซ้ายไปขวา แต่ละตำแหน่งเลือกใช้ลวดลายได้จากทั้งหมด 6 แบบ ซึ่งใช้ซ้ำได้ กำหนดให้ทุกสามตำแหน่งที่ติดกันใช้ลวดลายต่างกันทั้งหมด จงหาจำนวนการจัดแผ่นภาพโดยยึดลำดับจากซ้ายไปขวา

6	5	4	4	4
1	2	3	4	5

จำนวนลวดลายที่เลือกได้ในแต่ละตำแหน่ง

วิธีทำ

ตำแหน่งแรกเลือกลวดลายได้ 6 แบบ ตำแหน่งที่สองต้องต่างจากตำแหน่งแรก จึงเลือกได้ 5 แบบ ตั้งแต่ตำแหน่งที่สาม ต้องต่างจากสองตำแหน่งก่อนหน้า ซึ่งมีลวดลายต่างกันอยู่แล้ว จึงเหลือให้เลือกตำแหน่งละ 4 แบบ

$$6 \cdot 5 \cdot 4^3 = 1920$$

ตอบ 1920 วิธี

การนับและความน่าจะเป็น

3.4 ความน่าจะเป็น

ปริภูมิตัวอย่าง S คือเซตผลลัพธ์พื้นฐานทั้งหมด เหตุการณ์ E คือสับเซตที่สนใจ สูตรจากจำนวนผลลัพธ์ใช้ได้เมื่อผลลัพธ์พื้นฐานมีจำนวนจำกัดและมีโอกาสเท่ากัน

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}, \quad 0 \leq P(E) \leq 1$$

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ถ้า A, B เป็นอิสระกัน

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

เลือก k สิ่งจาก n สิ่งโดยทุกกลุ่มมีโอกาสเท่ากัน โอกาสได้สิ่งพิเศษหนึ่งสิ่งที่กำหนดไว้คือ

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n} \quad (1 \leq k \leq n)$$

ผลลัพธ์ที่มีโอกาสเท่ากัน

ทอยลูกเต๋าเที่ยงตรงสองลูกอย่างเป็นอิสระ ผลลัพธ์เป็นคู่ลำดับ (i, j) ทั้งหมด 36 คู่ ผลรวมตั้งแต่ 2 ถึง 12 ไม่ได้มีโอกาสเท่ากัน เพราะจำนวนคู่ที่ให้แต่ละผลรวมต่างกัน

ตัวอย่าง ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรงสองลูก จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมแต้มเท่ากับ 8

วิธีทำ คู่แต้มที่เป็นไปได้คือ $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ รวม 5 คู่ จากทั้งหมด 36 คู่ จึงมีความน่าจะเป็น $5/36$

การหยิบโดยไม่ใส่คืน

ครั้งถัดไปต้องคำนวณจากจำนวนที่เหลือ หากมีลูกบอลแดง 3 ลูก น้ำเงิน 2 ลูก หยิบทีละลูกแบบสุ่มโดยไม่ใส่คืน โอกาสได้แดงทั้งสองครั้งเป็น

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

ตัวคุณที่สองใช้เงื่อนไขว่าครั้งแรกได้แดงแล้ว จึงเหลือแดง 2 จากทั้งหมด 4 ลูก เหตุการณ์สองครั้งนี้ไม่เป็นอิสระกัน

การนับและความน่าจะเป็น

ตัวอย่างประยุกต์ 3.4

กล่องบรรจุเซนเซอร์ 12 ชิ้น มีชิ้นที่ต้องสอบเทียบใหม่อยู่พอดี 1 ชิ้น เจ้าหน้าที่สุ่มหยิบพร้อมกัน 5 ชิ้น โดยทุกชุดมีโอกาสถูกเลือกเท่ากัน จงหาความน่าจะเป็นที่ชุดที่หยิบมีชิ้นที่ต้องสอบเทียบใหม่

วิธีทำ

จำนวนชุดที่เลือกได้ทั้งหมดคือ $\binom{12}{5} = 792$ ชุด สำหรับชุดที่มีเซนเซอร์ชิ้นพิเศษ ให้เลือกชิ้นนั้นไว้ก่อน แล้วเลือกอีก 4 ชิ้นจาก 11 ชิ้นที่เหลือ ได้ $\binom{11}{4} = 330$ ชุด

$$P = \frac{\binom{11}{4}}{\binom{12}{5}} = \frac{330}{792} = \frac{5}{12}$$

อีกวิธีหนึ่ง เซนเซอร์แต่ละชิ้นมีโอกาสถูกเลือกเท่ากัน เมื่อเลือก 5 จาก 12 ชิ้น โอกาสที่ชิ้นพิเศษจะอยู่ในชุดจึงเป็น $5/12$

ตอบ $\frac{5}{12}$

การนับและความน่าจะเป็น

3.5 การแข่งขันและกราฟ

ใช้จุดแทนทีม บุคคล หรือสถานที่ และใช้เส้นเชื่อมแทนการแข่งขันหรือการเชื่อมต่อ ต้องกำหนดว่าแต่ละคู่พบกันกี่ครั้งและหนึ่งนัดคัดออกกี่คน

การแข่งขันและเครือข่าย

พบกันหมด n ทีม คู่ละหนึ่งนัด : $M = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

แพ้คัดออก เหลือผู้ชนะหนึ่งคน : $M = n - 1$

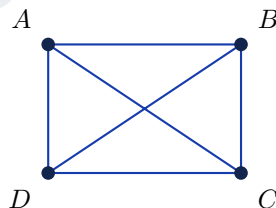
ระบบชนะ 3 เสมอ 1 แพ้ 0 มีคะแนนรวม T เมื่อเสมอ D นัด จากทั้งหมด M นัด

$$T = 3M - D, \quad D = 3M - T$$

กราฟไม่กำกับ มี E เส้นเชื่อม และดีกรีของจุด v คือ $\deg(v)$

$$\sum_v \deg(v) = 2E$$

กราฟเชื่อมต่อที่มี n จุดและไม่มีวงจรเป็นต้นไม้ ซึ่งมี $E = n - 1$



4 ทีมพบกันหมด มี 6 นัด แต่ละทีมพบคู่แข่ง 3 ทีม

ความหมายของดีกรี

ดีกรีคือจำนวนปลายเส้นที่ติดกับจุดนั้น แต่ละเส้นมีสองปลายจึงถูกนับสองครั้ง จุดตัดของเส้นในภาพไม่ถือเป็นจุดของกราฟ เว้นแต่กำหนดให้เป็นจุดเชื่อมต่อ

ตัวอย่าง การแข่งขัน 5 ทีมแบบพบกันหมดมีคะแนนรวม 27 คะแนน เมื่อชนะได้ 3 เสมอได้ 1 และแพ้ได้ 0 คะแนน

วิธีทำ มี $\binom{5}{2} = 10$ นัด จำนวนคู่ที่เสมอจึงเป็น $D = 3(10) - 27 = 3$ คู่ ถ้าตีกาเป็นชนะ 2 เสมอ 1 แพ้ 0 ทุกนัดให้คะแนนรวม 2 จึงมี $T = 2M$ และหาจำนวนนัดเสมอจากคะแนนรวมเพียงอย่างเดียวไม่ได้

การนับและความน่าจะเป็น

ตัวอย่างประยุกต์ 3.5

การแข่งขันหุ่นยนต์มีทีม W, X, Y, Z แข่งแบบพบกันหมดคู่ละหนึ่งครั้ง ชนะได้ 4 คะแนน เสมอได้ทีมละ 2 คะแนน และแพ้ได้ 0 คะแนน เมื่อจบการแข่งขัน มีเพียงคู่ W กับ X ที่เสมอกัน ทีม Z มีคะแนนน้อยที่สุด และทุกทีมมีคะแนนต่างกัน จงหาคะแนนของทีม Y

วิธีทำ

มีการแข่งขัน $\binom{4}{2} = 6$ คู่ แต่ละคู่ให้คะแนนรวม 4 คะแนน จึงมีคะแนนรวมทุกทีม 24 คะแนน ทีม W, X มีคะแนนใน $\{2, 6, 10\}$ และต้องต่างกัน ส่วน Y, Z มีคะแนนใน $\{0, 4, 8, 12\}$

- ถ้า Y ได้ 0 คะแนน จะไม่มีคะแนนของ Z ที่ต่ำกว่า จึงเป็นไปได้
- ถ้า Y ได้ 4 คะแนน จะมี $Z = 0$ และ $W + X = 20$ แต่คะแนนต่างกันสองค่าของ W, X รวมได้มากที่สุด $10 + 6 = 16$
- ถ้า Y ได้ 12 คะแนน แปลว่าชนะทุกทีม ทำให้ W, X ได้ไม่เกิน 6 คะแนน จึงต้องเป็น 2 และ 6 แล้ว $Z = 24 - 12 - 2 - 6 = 4$ ซึ่งไม่ต่ำกว่าทุกทีม

จึงเหลือ $Y = 8$ คะแนน ผลการแข่งขันที่เป็นไปได้คือ W ชนะ Y, Z และเสมอ X ส่วน X ชนะ Z และแพ้ Y และ Y ชนะ Z คะแนนจะเป็น $W = 10, X = 6, Y = 8, Z = 0$ ตามเงื่อนไข

ตอบ 8 คะแนน

การนับและความน่าจะเป็น

3.6 สถิติ: ค่ากลางและการกระจาย

ให้ข้อมูล $n \geq 1$ ค่าเรียงจากน้อยไปมากเป็น $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ ค่าเฉลี่ยใช้ข้อมูลทุกค่า ส่วนมัธยฐานใช้ตำแหน่งกลางของข้อมูลที่เรียงแล้ว

ค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และพิสัย

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{x}$$

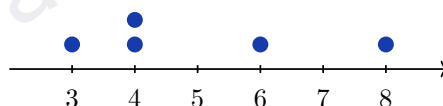
ตารางความถี่ที่ค่า x_i มีความถี่ f_i

$$\bar{x} = \frac{\sum_i f_i x_i}{\sum_i f_i}$$

$$\text{Med} = \begin{cases} x_{((n+1)/2)} & n \text{ คี่} \\ \frac{x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}}{2} & n \text{ คู่} \end{cases}$$

$$\text{พิสัย} = x_{(n)} - x_{(1)}$$

ฐานนิยมคือค่าที่มีความถี่สูงสุด อาจมีหลายค่า หากทุกค่ามีความถี่เท่ากันจะไม่ชี้ค่าที่เด่นกว่าค่าอื่น



ข้อมูล 3, 4, 4, 6, 8 มีค่าเฉลี่ย 5 มัธยฐาน 4 ฐานนิยม 4 และพิสัย 5

การแก้ข้อมูลและการลบข้อมูล

ถ้าบันทึกค่า a ผิดและแก้เป็น b โดยจำนวนข้อมูลคงเดิม

$$\bar{x}_{\text{ใหม่}} = \bar{x} + \frac{b-a}{n}$$

ถ้าลบข้อมูลค่า m ออกหนึ่งค่า ให้ใช้ $\bar{x}_{\text{ใหม่}} = (n\bar{x} - m)/(n-1)$ เมื่อ $n > 1$ และต้องเรียงข้อมูลใหม่ก่อนหา มัธยฐาน

การเลือกค่ากลาง

ค่าเฉลี่ยเปลี่ยนตามข้อมูลทุกค่า จึงได้รับผลจากค่าที่สูงหรือต่ำผิดปกติ ส่วนพิสัยขึ้นกับเพียงค่าปลายสองค่า ไม่บอกการกระจายของข้อมูลทั้งหมด

การนับและความน่าจะเป็น

ตัวอย่างประยุกต์ 3.6

คลังพัสดุคำนวณน้ำหนักเฉลี่ยของพัสดุก่อนหนึ่งได้ 7.8 กิโลกรัม ต่อมาพบว่าบันทึกผิดสามรายการ รายการแรกมากกว่าน้ำหนักจริง 1.5 กิโลกรัม รายการที่สองน้อยกว่าน้ำหนักจริง 0.9 กิโลกรัม และรายการที่สามมีน้ำหนักจริง 2.6 กิโลกรัม แต่บันทึกเป็น 6.8 กิโลกรัม เมื่อแก้ไขแล้วค่าเฉลี่ยเป็น 7.6 กิโลกรัม โดยค่าเฉลี่ยทั้งสองเป็นค่าที่แน่นอน จงหาจำนวนพัสดุทั้งหมด

วิธีทำ

การแก้ไขทำให้ผลรวมน้ำหนักเปลี่ยนไป

$$-1.5 + 0.9 + (2.6 - 6.8) = -4.8 \text{ กิโลกรัม}$$

ให้จำนวนพัสดุเป็น n ชิ้น ผลรวมเดิมเป็น $7.8n$ และผลรวมที่ถูกต้องเป็น $7.6n$ จึงมี

$$7.8n - 4.8 = 7.6n \implies 0.2n = 4.8$$

ดังนั้น $n = 24$

ตอบ 24 ชิ้น

การนับและความน่าจะเป็น

3.7 การอ่านและวิเคราะห์ข้อมูล

ก่อนคำนวณจากตารางหรือแผนภูมิ ให้ตรวจชื่อเรื่อง หน่วย มาตรฐาน ส่วน จำนวนข้อมูล และฐานของร้อยละ เพื่อให้ค่าที่นำมาเปรียบเทียบมีความหมายเดียวกัน

ค่าเฉลี่ยรวมและสัดส่วนข้อมูล

กลุ่มที่ i มีจำนวนข้อมูล n_i และค่าเฉลี่ย $\bar{x}_i$

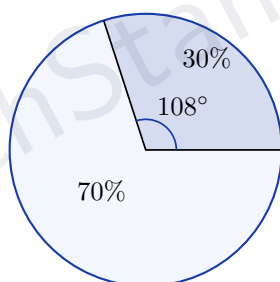
$$\bar{x}_{\text{รวม}} = \frac{n_1\bar{x}_1 + \cdots + n_k\bar{x}_k}{n_1 + \cdots + n_k}$$

ส่วนย่อยมีจำนวน f จากทั้งหมด $N > 0$ คิดเป็นร้อยละ p และมีมุมศูนย์กลาง θ

$$\frac{f}{N} = \frac{p}{100} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

ถ้าแปลงข้อมูลทุกค่าเป็น $y_i = ax_i + b$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \quad \text{พิสัยของ } y = |a|(\text{พิสัยของ } x)$$



มุม 108° แทนสัดส่วน $3/10$ หรือ 30%

ตัวอย่าง ผลสำรวจมีข้อมูล 320 รายการ หมวดหนึ่งคิดเป็น 30% ของทั้งหมด

วิธีทำ หมวดนี้มี $0.30(320) = 96$ รายการ และมุมในแผนภูมิวงกลมเป็น $0.30(360^\circ) = 108^\circ$

หลักในการวิเคราะห์

- ค่าเฉลี่ยของหลายกลุ่มต้องถ่วงด้วยขนาดกลุ่ม เฉลี่ยค่าเฉลี่ยโดยตรงได้เมื่อกลุ่มมีขนาดเท่ากัน
- แผนภูมิแท่งต้องตรวจจุดเริ่มและช่วงของแกน การตัดแกนอาจทำให้ความต่างดูมากเกินไปจริง
- ความถี่สะสมคือผลรวมความถี่ตั้งแต่กลุ่มแรกถึงกลุ่มที่พิจารณา ใช้ระบุตำแหน่งมัธยฐานได้
- จำนวนส่วนย่อยต้องรวมตรงกับทั้งหมด และค่าเฉลี่ยต้องอยู่ระหว่างค่าต่ำสุดกับค่าสูงสุด

การนับและความน่าจะเป็น

ตัวอย่างประยุกต์ 3.7

ศูนย์บริการรับงาน 250 รายการ โดย 60% เป็นงานประเภทมาตรฐานซึ่งใช้เวลาเฉลี่ยรายการละ 15 นาที ที่เหลือเป็นงานประเภทด่วนซึ่งใช้เวลาเฉลี่ยรายการละ 5 นาที จงหาเวลาเฉลี่ยต่อรายการของงานทั้งหมด

วิธีทำ

งานมาตรฐานมี $0.60(250) = 150$ รายการ และงานด่วนมี $250 - 150 = 100$ รายการ เวลารวมของงานทั้งหมดเป็น

$$150(15) + 100(5) = 2250 + 500 = 2750 \text{ นาที}$$

หารด้วยจำนวนงานทั้งหมด ได้

$$\bar{t} = \frac{2750}{250} = 11 \text{ นาทีต่อรายการ}$$

หรือคำนวณจากน้ำหนักของแต่ละกลุ่มเป็น $0.60(15) + 0.40(5) = 11$

ตอบ 11 นาทีต่อรายการ